

УДК 532.3:534.1

О.М. Макасеєв, О.Ю. Швець

## МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ЗАПІЗНЮВАННЯ НА КОЛИВАННЯ МАЯТНИКІВ ПРИ ОБМЕЖЕНОМУ ЗБУДЖЕННІ

We consider the non-ideal dynamical system “pendulum—electric motor” taking into account the delay effect of the electric motor impulse on the pendulum and delay of the medium reaction on the dynamical pendulum state. The system mathematical model is a system of ordinary differential equations with delay. We propose the approaches reducing the mathematical model of the system to a system of differential equations without delay. We investigate the influence of various factors of delay on steady-state regimes of the system “pendulum—electric motor”. The phase-parametric characteristics of the system and dependences of maximum non-zero Lyapunov’s characteristic exponent of the delay are constructed and analyzed. The essential influence of the delay on origin, evolution and extinction of the deterministic chaos in the system is shown. The scenarios of transition from steady-state regular regimes to chaotic ones are identified. We ascertain that it is sufficient to use three-dimensional mathematical models for small values of the delay, whereas nine-dimensional mathematical models should be used for relatively high values of the delay.

### Вступ

При математичному моделюванні коливальних процесів досить типовою є ситуація, коли математична модель динамічної системи порівняно простої, за формальним описом, фізичної динамічної системи успішно використовується для вивчення динаміки значно більш складних динамічних систем. Це дає змогу при збереженні адекватності опису динаміки значно спростити вигляд математичної моделі та подолати методологічні труднощі при розв’язуванні відповідних математичних рівнянь. Характерним прикладом такого підходу є широке використання маятникових моделей для дослідження динаміки реальних машин, механізмів, технічних пристроїв і конструкцій, біологічних систем та організмів, фінансових ринків тощо. Таке широке використання маятникових моделей робить актуальним безпосереднє дослідження динаміки маятникових систем.

У роботі вивчаються коливання неідеальної, за Зоммерфельдом—Кононенком [1], динамічної системи маятник—джерело збудження з урахуванням факторів запізнювання. Запізнювання впливів завжди має місце в досить протяжних системах внаслідок обмеженості швидкості проходження сигналів: хвиль стиснення, розтягування, вигину, сили струму тощо. Вивчення впливу запізнювання на динамічну стійкість положень рівноваги маятникових систем було розпочато в роботах Ю.А. Митропольського і його наукової школи в 80-х роках ХХ ст. [2, 3]. Причому спочатку розглядалися тільки ідеальні маятникові моделі. Математичні моделі маятникової системи при обмеженому

збудженні, з урахуванням впливу різних факторів запізнювання, вперше були отримані в працях [4, 5]. Було вивчено вплив запізнювання на існування і динамічну стабілізацію положення рівноваги маятника при обмеженому збудженні. Потім було виявлено існування хаотичних атракторів у неідеальних системах маятник—електродвигун і доведено, що основною причиною виникнення детермінованого хаосу є обмеженість збудження [6, 7].

### Постановка задачі

Метою роботи є побудова математичної моделі системи маятник—електродвигун з урахуванням запізнювання взаємодії між маятником і електродвигуном та запізнювання реакції середовища на динамічний стан маятника, а також дослідження впливу цих запізнювань на усталені режими коливань зазначеної системи.

### Система маятник—електродвигун з урахуванням впливу факторів запізнювання

Рівняння руху системи маятник—електродвигун за умови відсутності факторів запізнювання тих чи інших впливів були отримані в [8]:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = Cy_1 - y_2y_3 - \frac{1}{8}(y_1^2y_2 + y_2^3); \\ \frac{dy_2}{d\tau} = Cy_2 + y_1y_3 + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1y_2^2) + 1; \\ \frac{dy_3}{d\tau} = Dy_2 + Ey_3 + F, \end{cases} \quad (1)$$

де фазові змінні  $y_1, y_2$  описують відхилення маятника від вертикалі, а фазова змінна  $y_3$  пропорційна швидкості обертання вала електродвигуна. Параметри системи визначаються за формулами

$$C = -\delta_1 \varepsilon^{-2/3} \varpi_0^{-1}, D = -\frac{2ml^2}{I},$$

$$F = \frac{2l^{2/3}}{a^{2/3}} \left( \frac{N_0}{\varpi_0} + E \right), \quad (2)$$

де  $m$  – маса маятника,  $l$  – зведена довжина маятника,  $\varpi_0$  – власна частота маятника,  $a$  – довжина кривошипа електродвигуна,  $\varepsilon = \frac{a}{l}$ ,  $\delta_1$  – коефіцієнт демпфірування середовища,  $I$  – момент інерції ротора електродвигуна,  $E, N_0$  – сталі статичної характеристики електродвигуна.

Розглянемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy_1(\tau)}{d\tau} = Cy_1(\tau - \delta) - y_2(\tau)y_3(\tau - \gamma) - \\ - \frac{1}{8}(y_1^2(\tau)y_2(\tau) + y_2^3(\tau)); \\ \frac{dy_2(\tau)}{d\tau} = Cy_2(\tau - \delta) + y_1(\tau)y_3(\tau - \gamma) + \\ + \frac{1}{8}(y_1^3(\tau) + y_1(\tau)y_2^2(\tau)) + 1; \\ \frac{dy_3(\tau)}{d\tau} = Dy_2(\tau - \gamma) + Ey_3(\tau) + F. \end{cases} \quad (3)$$

Ця система є системою рівнянь із постійним запізнюванням. Постійний додатний параметр  $\gamma$  введений для врахування запізнювання імпульсу впливу електродвигуна на маятник. Будемо вважати, що запізнювання реакції електродвигуна на вплив сили інерції маятника також дорівнює  $\gamma$ . Врахування запізнювання  $\gamma$  зумовлене тим, що швидкість хвилі збурення на елементи конструкції має скінченну величину, яка залежить від властивостей зовнішніх полів, наприклад температурного поля. Своєю чергою постійний додатний параметр  $\delta$  характеризує запізнювання реакції середовища на динамічний стан маятника. Таке запізнювання зумовлене обмеженістю швидкості звуку в цьому середовищі.

Вважаючи запізнювання малим, можемо записати

$$y_i(\tau - \gamma) = y_i(\tau) - \frac{y_i(\tau)}{d\tau} \gamma + \dots, \quad i = 2, 3,$$

$$y_i(\tau - \delta) = y_i(\tau) - \frac{y_i(\tau)}{d\tau} \delta + \dots, \quad i = 1, 2.$$

Тоді, якщо  $C\delta \neq -1$ , можемо отримати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = \frac{1}{1+C\delta} (Cy_1 - y_2[y_3 - \gamma(Dy_2 + Ey_3 + F)] \times \\ \times y_3 - \frac{1}{8}(y_1^2 y_2 + y_2^3)); \\ \frac{dy_2}{d\tau} = \frac{1}{1+C\delta} (Cy_2 + y_1 y_3 - y_1 \gamma(Dy_2 + Ey_3 + F) + \\ + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1 y_2^2) + 1); \\ \frac{dy_3}{d\tau} = (1 - C\gamma)Dy_2 - \frac{D\gamma}{8}(y_1^3 + y_1 y_2^2 + 8y_1 y_2^2 + \\ + 8y_1 y_3 + 8) + Ey_3 + F. \end{cases} \quad (4)$$

Отримана система рівнянь є вже системою звичайних диференціальних рівнянь. Запізнювання входять у цю систему як додаткові параметри.

Для апроксимації системи (3) може бути застосований і інший, більш точний, спосіб [9, 10]. Розглянемо випадок за наявності в системі (3) запізнювання взаємодії між маятником і електродвигуном  $\gamma$ , але за відсутності запізнювання середовища  $\delta$ , тобто коли  $\gamma > 0, \delta = 0$ . Тоді система (3) матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = Cy_1 - y_2 y_3 (\tau - \gamma) - \frac{1}{8}(y_1^2 y_2 + y_2^3); \\ \frac{dy_2}{d\tau} = Cy_2 + y_1 y_3 (\tau - \gamma) + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1 y_2^2) + 1; \\ \frac{dy_3}{d\tau} = Dy_2 (\tau - \gamma) + Ey_3 + F. \end{cases} \quad (5)$$

Розділимо інтервал  $[-\gamma; 0]$  на  $m$  однакових частин і позначимо

$$y_1(\tau) = y_{10}(\tau), \quad y_2\left(\tau - \frac{i\gamma}{m}\right) = y_{2i}(\tau),$$

$$y_3\left(\tau - \frac{i\gamma}{m}\right) = y_{3i}(\tau), \quad i = \overline{0, m}.$$

Тоді, використовуючи різницеву апроксимацію похідної [9, 10], отримаємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_{10}(\tau)}{d\tau} = Cy_{10}(\tau) - y_{20}(\tau)y_{3m}(\tau) - \\ - \frac{1}{8}(y_{10}^2(\tau)y_{20}(\tau) + y_{20}^3(\tau)); \\ \frac{dy_{20}(\tau)}{d\tau} = Cy_{20}(\tau) + y_{10}(\tau)y_{3m}(\tau) + \\ + \frac{1}{8}(y_{10}^3(\tau) + y_{10}(\tau)y_{20}^2(\tau)) + 1; \\ \frac{dy_{30}(\tau)}{d\tau} = Dy_{2m}(\tau) + Ey_{30}(\tau) + F; \\ \frac{dy_{2i}(\tau)}{d\tau} = \frac{m}{\gamma}(y_{2i-1}(\tau) - y_{2i}(\tau)), i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_{3i}(\tau)}{d\tau} = \frac{m}{\gamma}(y_{3i-1}(\tau) - y_{3i}(\tau)), i = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Система (6) є системою звичайних диференціальних рівнянь  $(2m+3)$ -го порядку. Як і в системі (4), запізнювання  $\gamma$  входить у систему (6) як додатковий параметр.

Розглянемо інший випадок, коли в системі (3) немає запізнювання взаємодії між маятником і електродвигуном, але при цьому є запізнювання середовища, тобто  $\gamma = 0, \delta > 0$ . Тоді систему (3) можемо записати у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_{10}(\tau)}{d\tau} = Cy_{1m}(\tau) - y_{20}(\tau)y_{30}(\tau) - \\ - \frac{1}{8}(y_{10}^2(\tau)y_{20}(\tau) + y_{20}^3(\tau)); \\ \frac{dy_{20}(\tau)}{d\tau} = Cy_{2m}(\tau) + y_1(\tau)y_3(\tau - \gamma) + \\ + \frac{1}{8}(y_1^3(\tau) + y_1(\tau)y_2^2(\tau)) + 1; \\ \frac{dy_{30}(\tau)}{d\tau} = Dy_{20}(\tau) + Ey_{30}(\tau) + F; \\ \frac{dy_{1i}(\tau)}{d\tau} = \frac{m}{\delta}(y_{1i-1}(\tau) - y_{1i}(\tau)), i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_{2i}(\tau)}{d\tau} = \frac{m}{\delta}(y_{2i-1}(\tau) - y_{2i}(\tau)), i = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (7)$$

Аналогічним чином можемо отримати систему рівнянь і у випадку  $\gamma = \delta > 0$ . При виборі достатньо великого  $m$  отримані системи будуть дуже добре наближувати систему (3) [9]. При-

чому розв'язки  $y_1, y_2, y_3$  системи (3) описуються відповідно функціями  $y_{10}, y_{20}, y_{30}$  систем (6), (7).

### Дослідження усталених режимів взаємодії

Системи рівнянь (4), (6), (7) є істотно нелінійними, тому дослідження усталених режимів, у загальному випадку, може бути проведено не тільки за допомогою числових методів. Для розв'язку цих систем використовувався метод Рунге–Кутти п'ятого порядку зі змінним кроком інтегрування з використанням коригувальної процедури за формулами Дормана–Прінса [11–14]. Такий метод дає можливість забезпечити достатньо високу точність проведених обчислень. Локальна точність методу задана на рівні не менше  $O(10^{-10})$ . Розрахунок спектра ЛХП проводився за допомогою алгоритму Беннеттіна та ін., а для побудови фазопараметричних характеристик використовувався метод Ено. Ці методи детально описані в [8].

Проаналізуємо вплив запізнювання взаємодії між маятником і електродвигуном  $\gamma$  за відсутності запізнювання середовища ( $\delta = 0$ ) за таких значень параметрів системи:  $C = -0,1$ ,  $D = -0,53$ ,  $E = -0,6$ ,  $F = 0,19$ . На рис. 1, а наведено залежність старшого, відмінного від нуля, ляпуновського характеристичного показника системи (4), а на рис. 1, б – фазопараметричну характеристику (так зване біфуркаційне дерево) цієї системи.

Як відомо, наявність у спектрі ЛХП додатного показника є основним практичним критерієм існування в системі хаотичного атрактора [8]. На рис. 1, а чітко простежується наявність інтервалів зміни запізнювань  $\gamma$ , за яких старший ляпуновський показник системи буде додатним. У цих інтервалах у системі існують хаотичні атрактори. Не менш чітко простежується область існування хаосу і на фазопараметричній характеристиці (див. рис. 1, б). Хаотичним атракторам відповідають густо заповнені ділянки “крони” біфуркаційного дерева, а регулярним атракторам – області, в яких розміщені окремі “гілки” такого дерева.

Уважне вивчення отриманих рисунків дає змогу не тільки діагностувати виникнення хаосу в системі, а й встановити сценарій переходу до хаосу [6, 7]. На рис. 1, б можна чітко побачити розщеплення гілок біфуркаційного дерева, абсциси яких відповідають точкам біфуркацій подвоєння періоду граничних циклів сис-

теми маятник–електродвигун. Причому при проходженні кожної точки біфуркації подвоюється не тільки період, але й так звана тактність граничного циклу. Точки біфуркацій за зміни запізнювання  $\gamma$  також можуть бути визначені при вивченні рис. 1, *a* – це точки підходів графіка ляпуновського показника до нульової лінії. Таким чином, перехід до хаосу при зменшенні запізнювання  $\gamma$  відбувається за сценарієм Фейгенбаума (нескінченний каскад біфуркацій подвоєння граничного циклу).

Свою чергою перехід до хаосу за збільшення значень запізнювання відбувається за сценарієм Помо–Маннвілля, за одну біфуркацію, через переміжність.

На рис. 2, *a* наведено залежність старшого, відмінного від нуля, ляпуновського характе-

ристичного показника за тих же значень параметрів, тільки для системи (6) при  $m = 3$ , а на рис. 2, *b* – фазопараметричну характеристику цієї системи. За малих значень запізнювання  $\gamma$ , в нашому випадку при  $\gamma < 0,1$ , фазопараметричні характеристики на рис. 1, *b* і рис. 2, *b* практично збігаються. При подальшому збільшенні запізнювання взаємодії між маятником і електродвигуном  $\gamma$  спостерігається якісний збіг цих рисунків, але з деяким зсувом. Так, наприклад, при  $\gamma = 0,12$  усталеним режимом системи (4) буде хаотичний атрактор, у той же час атрактором системи (6) за такого значення запізнювання буде граничний цикл.

Проаналізуємо вплив запізнювання середовища  $\delta$  на типи усталених режимів системи за відсутності запізнювання взаємодії між маят-

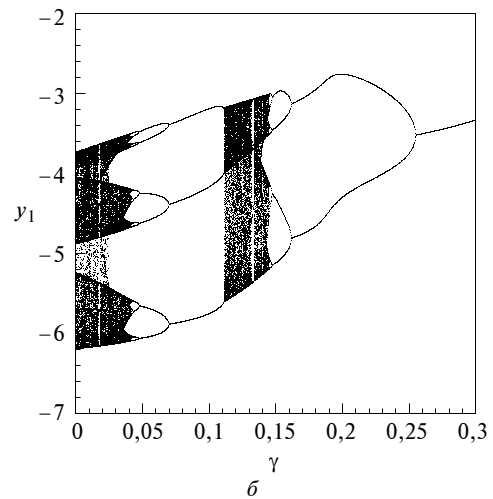
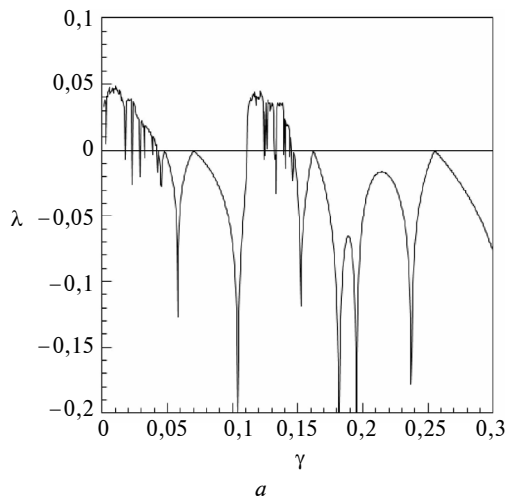


Рис. 1. Залежність старшого, відмінного від нуля, ляпуновського характеристичного показника (*a*) і фазопараметрична характеристика (*b*) системи (4)

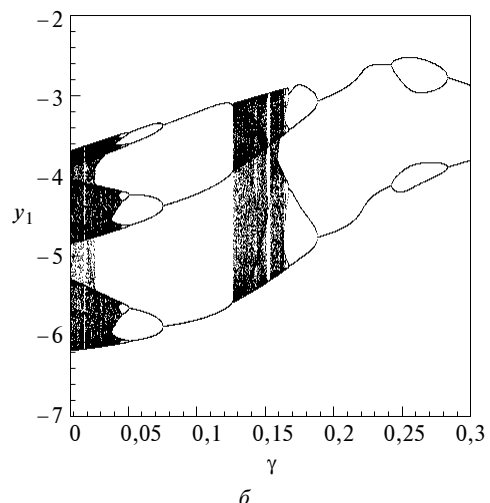
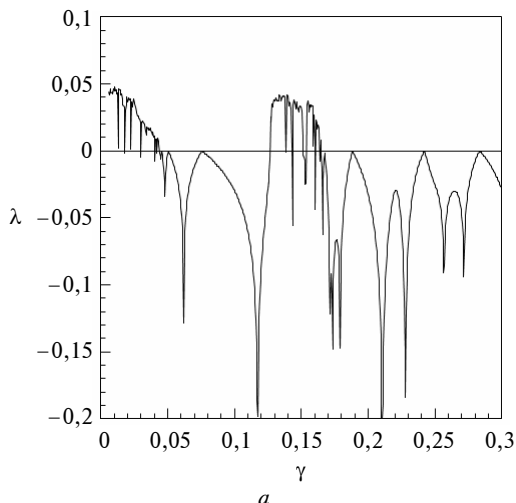


Рис. 2. Залежність старшого, відмінного від нуля, ляпуновського характеристичного показника (*a*) і фазопараметрична характеристика (*b*) системи (6) при  $m = 3$

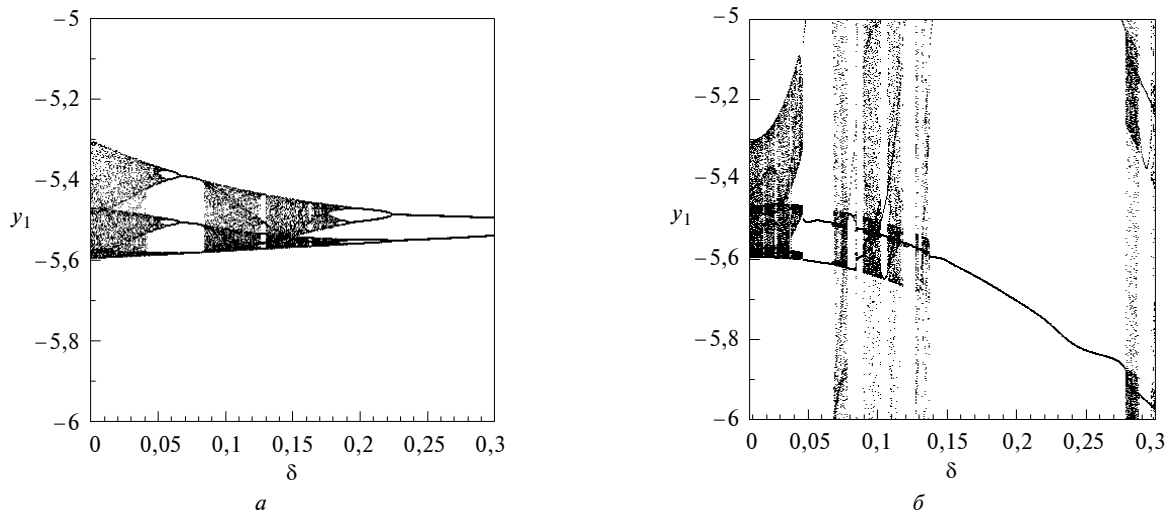


Рис. 3. Фазопараметрична характеристика системи (4) (а) та системи (7) (б) при  $m = 3$

ником і електродвигуном  $\gamma$ . Нехай значення параметрів системи такі:  $C = -0,1$ ,  $D = -0,5$ ,  $E = -0,59$ ,  $F = -0,31$ . На рис. 3, а, б показані відповідно фазопараметричні характеристики для системи (4) і для системи (7) при  $m = 3$ .

Як видно з рис. 3, за відсутності запізнювання в системі реалізується хаотичний режим, який при збільшенні запізнювання середовища  $\delta$  змінюється областю граничних циклів, яка при подальшому збільшенні запізнювання  $\delta$  чергується з областю хаосу й областю граничних циклів. За цих значень параметрів динаміка систем (4) і (7) однакова тільки в дуже малому інтервалі зміни значень запізнювання  $\delta$ . При збільшенні  $\delta$  розбіжності динаміки цих систем стають дуже істотними. Це говорить про те, що більш просту систему рівнянь (4) доцільно використовувати для дослідження системи (3) тільки за дуже малих значень запізнювань. При зростанні значень запізнювання для дослідження хаотичних і регулярних коливань системи маятник–електродвигун потрібно використовувати більш складні математичні моделі (6), (7).

Зазначимо, що в статті наведені результати досліджень систем рівнянь (6), (7) для  $m = 3$ . У цьому випадку системи рівнянь (6), (7) складаються з 9 рівнянь. Були проведені розрахунки для випадків  $m > 3$ , тобто при істотному збільшенні кількості рівнянь математичної мо-

делі. Встановлено, що збільшення кількості рівнянь практично не впливає на ідентифікацію та опис граничних множин системи маятник–електродвигун. Але при цьому значно зростає складність побудови необхідних для дослідження усталених режимів коливань характеристик. Тому застосування математичних моделей (6), (7) при  $m = 3$  є найбільш оптимальним для дослідження впливу запізнювань на регулярну та хаотичну динаміку системи маятник–електродвигун.

### Висновки

Різні фактори запізнювання істотно впливають на динаміку системи маятник–електродвигун. Наявність запізнювання в таких системах може як сприяти виникненню детермінованого хаосу, так і призвести до зникнення хаотичних атракторів, існуючих у таких системах за відсутності запізнювання. Показано, що для дослідження усталених режимів системи маятник–електродвигун за досить малих значень запізнювання можливо використовувати тривимірну математичну модель. При зростанні значень запізнювання потрібно використовувати дев'ятивимірні математичні моделі.

У подальших дослідженнях плануються побудова та дослідження математичних моделей системи маятник–електродвигун за наявності змінних у часі факторів запізнювання.

1. *V.O. Kononenko*, Vibrating system with a limited power-supply. UK, London: Iliffe, 1969, 236 p.
2. *Митропольский Ю.А., Швец А.Ю.* О влиянии запаздывания на устойчивость маятника с вибрирующей точкой подвеса // Аналитические методы исследования нелинейных колебаний. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 115–120.
3. *Митропольский Ю.А., Швец А.Ю.* О колебаниях маятника с вибрирующей точкой подвеса при наличии запаздывания // Там же. – С. 120–128.
4. *Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.* Хаотические режимы взаимодействия в системе “маятник–источник энергии” // Прикл. механика. – 1990. – 26, № 5. – С. 90–96.
5. *T.S. Krasnopolskaya and A.Yu. Shvets*, “Chaos in vibrating systems with limited power-supply”, *Chaos*, vol. 3, no. 3, pp. 387–395, 1993.
6. *A.Yu. Shvets and A.M. Makaseyev*, “Chaotic Oscillations of Nonideal Plane Pendulum Systems”, *CMSIM J.*, no. 1, pp. 195–204, 2012.
7. *Швец А.Ю., Макасеев А.М.* Атлас карт динамических режимов неидеальной системы “маятник–электро-двигатель” // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ. – 2010. – 7, № 3. – С. 465–480.
8. *Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. – М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исследований, 2008. – 280 с.
9. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Новые методы хаотической динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.
10. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
11. *J.R. Dormand and P.J. Prince*, “New Runge-Kutta algorithms for numerical simulation in dynamical astronomy”, *Celestial Mech.*, vol. 18, pp. 223–232, 1978.
12. *J.R. Dormand and P.J. Prince*, “A family of embedded Runge–Kutta formulae”, *J. Comp. Appl. Math.*, vol. 6, pp. 19–26, 1980.
13. *P.J. Prince and J.R. Dormand*, “High order embedded Runge–Kutta formulae”, *Ibid*, vol. 7, pp. 67–75, 1981.
14. *E. Hairer et al.*, Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, 2nd ed., in Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, 1993, 528 p.

Рекомендована Радою  
фізико-математичного факультету  
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції  
19 серпня 2013 року