Міністерство освіти і науки
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут"

ШВЕЦЬ О.Ю.

Детермінований хаос

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою НТУУ "КПІ"

Київ
НТУУ "КПІ"
2010

Щвець О.Ю. Детермінований хаос: навчальний посібник для студентів фізико–математичного ф–ту.–К:НТУУ "КПІ" , 2010.–93 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ "КПІ"
(Протокол № 4 від 23 грудня 2010 року)

Навчальне видання

Детермінований хаос

Навчальний посібник
до вивчення дисципліни "Детермінований хаос"
для студентів фізико–математичного ф–ту

Автор *Швець Олександр Юрійович*

Відповідальний редактор *В.Я. Данилов*, док. техн. наук, проф.

Рецензенти *Д.Г. Коренівськкий*, док. фіз.–мат. наук, проф.
О.Г. Мазко, док. фіз.–мат. наук, ст.н.с.
В.В. Новицький, док. фіз.–мат. наук, проф.

УДК. 517.9, 534.1

ШВЕЦЬ О.Ю.

У навчальному посібнику викладені основні сучасні аналітичні й комп'ютерні методи знаходження та дослідження розв'язків динамічних систем. Описані методи знаходження ляпуновських характеристичних показників, перерізів та відображень Пуанкаре, природних інваріантних мір, Фур'є–спектрів та розмірностей регулярних та хаотичних атракторів динамічних систем.

Розглянуті питання виникнення, розвитку та зникнення детермінованого хаосу в маятникових системах з обмеженим збудженням. Встановлений вирішальний вплив обмеженості збудження на хаотизацію таких систем. Побудовані та ретельно проаналізовані фазові портрети, перерізи та відображення Пуанкаре, розподіли природних інваріантних мір та спектральних густин регулярних та хаотичних атракторів розглянутих маятникових систем. Показано існування різних типів хаотичних атракторів та описано декілька сценаріїв переходу від регулярних режимів до хаотичних.

Призначена для студентів університетів, що навчаються за спеціальністю "Математика".

Зміст

Розділ 1

Сучасні методи нелінійної динаміки

1. 1. Вступ

Одним із самих значних наукових відкриттів двадцятого століття, поряд з теорією відносності та квантовою фізикою, є відкриття детермінованого хаосу в динамічних системах [1, 2, 6, 7]. Суть цього відкриття полягає в тому, що повністю визначена (детермінована) динамічна система, при відсутності будь-яких випадкових впливів на неї, починає поводитися непередбаченим (хаотичним) чином. Однак у цій непередбачуваності (хаотичності) при більш ретельному розгляді вдається виявити ряд закономірностей у поведінці системи, що відрізняє дане явище від класичних випадкових процесів. Більше того, на відміну від класичних випадкових процесів, явища детермінованого хаосу можуть бути відтворені в натурних, лабораторних і чисельних експериментах. Що саме істотне детермінований хаос не є винятковим режимом поведінки динамічних систем, навпаки, такі режими спостерігаються в дуже багатьох динамічних системах, які розглядаються в математиці, фізиці, хімії, біології й медицині. Такі детерміновані хаотичні режими найчастіше є більш типовими режимами, чим повністю передбачувані (регулярні) режими. Можна сказати, що навколишній матеріальний світ "повністю занурений у хаос". Як з'ясувалося, явища детермінованого хаосу властиві не тільки матеріальному світу. Останнім часом такі явища усе частіше описуються в дослідженнях з економіки, соціології, філософії, історії. Тому дослідження з хаотичної динаміки є одним з магістральних шляхів розвитку сучасного природознавства.

Явища детермінованого хаосу можливі тільки в нелінійних системах. Тому, з відкриттям детермінованого хаосу повністю розвіялися ілюзії, що раніше існували, про можливість адекватного опису реальних процесів за допомогою лінійних математичних моделей. Погляд на нелінійні системи, як на деяке "косметичне" поліпшення лінійних моделей беззастережно іде в минуле. Тому надзвичайної ваги у сучасних наукових дослідженнях набувають методи нелінійної динаміки, вивченню яких присвячений даний розділ.

1. 2. Визначення та класифікація динамічних систем

Під динамічною системою розуміють будь-який об'єкт або процес, для якого однозначно визначене поняття стану, як сукупності деяких величин у даний момент часу й заданий оператор, який описує еволюцію початкового стану в часі. Історично поняття динамічної системи виникло як узагальнення системи механічної природи, однак при такому визначенні більшість систем матеріального й не тільки матеріального світу підпадає під поняття "динамічна система". Динамічні системи можуть мати механічну, фізичну, хімічну, біологічну, фінансову й соціальну природу. Вони існують в обчислювальних процесах і процесах обробки й перетворення інформації, які здійснюються відповідно до конкретних алгоритмів. Нарешті, динамічною системою є процес розвитку людського суспільства в цілому.

Опис динамічних систем, у сенсі визначення оператора еволюції, також допускає надзвичайно велику різноманітність. Такий опис може бути проведений за допомогою диференціальних рівнянь, дискретних відображень, інтегральних та інтегро–диференціальних рівнянь, теорії графів, теорії марковських ланцюгів і.т.п.

Математична модель динамічної системи вважається заданою, якщо введені координати системи, які дозволяють визначити її стан, і зазначений еволюційний оператор, який дозволяє вирішувати задачу зміни стану системи в часі. Відмітимо, що одній і тій же динамічній системі, в залежності від степеня наближення, можуть бути поставлені у відповідність різні математичні моделі. Наприклад, при вивченні коливань маятника, залежно від степеня обліку різних факторів, ми одержимо різні математичні моделі, які описують якісно відмінні динамічні процеси (коливання маятника з врахуванням і без врахування тертя). Ще одним яскравим прикладом існування різних моделей є математичне моделювання однієї й тієї ж довільної коливальної системи з врахуванням і без врахування неідеальності збудження.

Дуже часто виникають випадки, коли при дослідженні реальної системи в рамках певних припущень створюється її наближена математична модель, яка надалі використовується для опису динамічної системи зовсім іншої природи. Так різні математичні моделі, отримані при описі маятникових систем, успішно застосовуються для дослідження оболонок, пластин, кілець, для опису коливань вільної поверхні рідини в баках, для моделювання роботи серцевого м'яза, для опису зміни чисельності біологічних популяцій і.т.п. У цьому проявляється глибока спільність динамічних явищ у матеріальному світі, яка відображається єдністю математичних закономірностей, що описують цю спільність.

Будемо розглядати динамічні системи, які моделюються скінченим числом звичайних диференціальних рівнянь. Відмітимо, що для таких систем найбільшою мірою збереглися представлення й термінологія, які спочатку виникли в механіці. Припустимо, що стан динамічної системи задається величинами $x_1, x_2, ..., x_n$ в деякий момент часу $t = t_0$. Величини x_i можуть приймати довільні значення, однак двом різним наборам величин x_i і x_i' відповідають два строго різні стани динамічної системи. Далі припустимо, що математичною моделлю цієї динамічної системи є система звичайних диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1,\, x_2, ..., x_n);$$
$$\dot{x}_2 = X_2(x_1,\, x_2, ..., x_n); \tag{1.1}$$
$$................................$$
$$\dot{x}_n = X_n(x_1,\, x_2, ..., x_n).$$

Якщо розглядати величини $x_1,\; x_2, ..., x_n$ як координати точки $\mathbf{x}$ в n–вимірному просторі, то виходить наочне геометричне представлення стану динамічної системи у вигляді цієї точки. Таку точку називають зображуючою або фазовою точкою, а простір станів – фазовим простором динамічної системи. Зміні стану системи в часі відповідає рух зображучої точки уздовж деякої лінії, яка називається фазовою траєкторією або просто траєкторією. У фазовому просторі системи правими частинами рівнянь (1.1) породжується векторне поле швидкостей, яке співставляє кожній точці $\mathbf{x}$ вектор

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \{X_1(x_1,\, x_2, ..., x_n), X_2(x_2,\, x_2, ..., x_n), ..., X_n(x_2,\, x_2, ..., x_n)\},$$

який виходить з неї. Модуль цього вектора чисельно дорівнює швидкості руху зображуючої точки по траєкторії. Сам вектор в кожній точці $\mathbf{x}$ спрямований по дотичній до фазової траєкторії.

Таким чином, динамічна система (1.1) може бути записана в векторній формі:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

де $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ . \\ . \\ \dot{x_n} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1(x_1,\, x_2, ..., x_n) \\ X_2(x_1,\, x_2, ..., x_n) \\ . \\ . \\ X_n(x_1,\, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$ – відповідно вектори і вектор–функція розмірності n.

Далі завжди будемо припускати, що праві частини системи (1.1) є аналітичними функціями. Тоді ця система задовольняє умовам теореми Коші–

Пікара (існування й єдиності розв'язку задачі Коші). В такому випадку кожному розв'язку системи (1.1) відповідає одна траєкторія й через кожну точку фазового простору проходить тільки одна траєкторія. Отже перетин двох різних траєкторій неможливий.

Прирівняємо праві частини системи (1.1) нулю, тобто розглянемо алгебраїчну систему рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&X_1(x_1,\, x_2, ..., x_n) = 0;\\
&X_2(x_1,\, x_2, ..., x_n) = 0;\\
&\dots\\
&X_n(x_1,\, x_2, ..., x_n) = 0.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Нехай, $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $\ldots, x_n = a_n$ – деякий розв'язок системи (1.3). Очевидно, що цей розв'язок також буде розв'язком і системи диференціальних рівнянь (1.1). Такий розв'язок буде постійним при зміні часу t. Йому відповідає фазова траєкторія, яка складається з однієї точки, причому ця точка нерухома у фазовому просторі. Такі точки називаються положеннями або станами рівноваги системи (1.1).

Нехай,

$$x_1 = \varphi_1(t),\, x_2 = \varphi_2(t),\, \ldots, x_n = \varphi_n(t) \tag{1.4}$$

– деякий розв'язок системи (1.1), причому існує таке додатне число T, що для довільного t мають місце рівності

$$\varphi_i(t+T) = \varphi_i(t),\;\; i = 1, 2, ..., n,$$

однак при $|\tau_1 - \tau_2| < T$, хоча б для одного $i = 1, 2, ..., n$ має місце нерівність $\varphi_i(\tau_1) \neq \varphi_i(\tau_2)$. У цьому випадку траєкторія, яка відповідає розв'язку (1.4), буде замкненою лінією у фазовому просторі. Така траєкторія називається циклом. Сам розв'язок (1.4) називається періодичним розв'язком. Цей розв'язок називається ізольованим періодичним розв'язком, а його траєкторія називається граничним циклом, якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якої точки

$M(x_1, ..., x_n)$ фазового простору, яка перебуває від циклу на відстані меншій ніж ε, розв'язок системи (1.1), який проходить через точку $M(x_1, ..., x_n)$ не є періодичним. Геометрично це означає, що у фазовому просторі поблизу замкненої траєкторії не проходять інші замкнені траєкторії.

У теорії диференціальних рівнянь доведено, що в системи (1.1) є три види траєкторій:

1. Положення рівноваги, які складаються з однієї нерухомої точки в фазовому просторі;

2. Цикли, які є замкненими лініями у фазовому просторі;

3. Траєкторії без самоперетинів (незамкнені траєкторії).

Далі дамо більш строге визначення динамічної системи. Таке визначення складається з трьох компонентів:

1. Метричного простору D, який називається фазовим простором. Зокрема фазовий простір може збігатися з усім n – вимірним евклідовим простором R^n.

2. Часу t, який може бути неперервним, тобто $t \in R^1$, або дискретним, тобто $t \in Z$ (усі цілі числа).

3. Закону (оператора) еволюції, тобто відображення будь-якої заданої точки x у фазовому просторі D і будь-якого значення t в однозначно визначений стан $\varphi(t, x) \in D$, який задовольняє теоретико–груповим властивостям:

3.1. $\varphi(0, x) = x$;

3.2. $\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x)$;

3.3. $\varphi(t, x)$ неперервне по (t, x).

Якщо змінна t неперервна, то зазначені умови визначають неперервну динамічну систему або потік. Інакше кажучи, потік – це однопараметрична група гомеоморфізмів фазового простору D. Фіксуючи x і змінюючи t від $-\infty$ до $+\infty$, одержимо орієнтовану криву, яка називається фазовою траєкторією. Класифікація траєкторій збігається з вищенаведеною класифікацією для систем диференціальних рівнянь.

Якщо змінна $t \in Z$, то умови 3.1.–3.3. визначають дискретну динамічну систему або каскад. Каскади володіють наступною властивістю. Розглянемо гомеоморфізм $\varphi(1, x)$ і позначимо його через $\psi(x)$. Очевидно, що $\varphi(t, x) = \psi^t(x)$, де

$$\psi^t = \psi(\psi(...(\psi(x)))).$$

Отже, для визначення каскаду досить визначити тільки гомеоморфізм $\psi : D \to D$.

Для дискретної динамічної системи послідовність $\{x_k\}_{k=-\infty}^{k=+\infty}$, де $x_{k+1} = \psi(x_k)$, називається траєкторією точки x_0. Існують три типи траєкторій:

1. Точка x_0. Ця точка є нерухомою точкою гомеоморфізму $\psi(x)$, тобто відображається за допомогою $\psi(x)$ у себе;

2. Цикл $(x_0, \ldots, x_{k-1})$, де $x_i = \psi^i(x_0)$, $i = 0, \ldots, k-1$, а $x_0 = \psi^k(x_0)$. Крім того, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Число k називається періодом циклу, а кожна точка x_i – періодичною з періодом k. Помітимо, що нерухома точка також є періодичною й має період рівний 1;

3. Нескінченна в обидва боки траєкторія, тобто послідовність $\{x_k\}_{k=-\infty}^{k=+\infty}$, де $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Таку послідовність будемо називати незамкнутою.

Тепер зупинимося на класифікації динамічних систем. У першу чергу динамічні системи класифікуються залежно від виду оператора еволюції $\varphi(t, x)$. Оператори еволюції класифікуються відповідно до їхніх властивостей і за формою завдання. Якщо оператор володіє властивістю суперпозиції, то він і відповідна динамічна система називаються лінійними. Якщо оператор – нелінійний, то й відповідна динамічна система називається нелінійною.

Способи визначення оператора еволюції $\varphi(t, x)$ також можуть відрізнятися. Його можна задавати у вигляді диференціального або інтегрального перетворення, у вигляді матриці або таблиці, дискретного відображення, марковського ланцюга й.т.п.

За енергетичною ознакою динамічні системи діляться на консервативні й дисипативні. Консервативні системи характеризуються незмінним у часі запасом енергії. У фізиці їх називають гамільтоновими. Динамічні системи, енергія яких зменшується із часом внаслідок тертя, розсіювання та інших факторів, називаються дисипативними. Переважна більшість реальних динамічних систем є дисипативними.

Серед динамічних систем особливо важливу роль відіграють системи, у яких можливі ті або інші коливання. Такі динамічні системи називають коливальними. Серед них виділяється особливий клас так званих автоколивальних систем, які принципово нелінійні й дисипативні. Автоколивальною називають динамічну систему, яка перетворює енергію джерела збудження в енергію незатухаючих коливань, причому основні характеристики коливань (амплітуда, частота, форма й.т.п.) визначаються параметрами системи й, у певних границях, не залежать від початкового стану системи.

1. 3. Граничні множини динамічних систем. Поняття дивного атрактора

Припустимо, що досліджувана динамічна система описується системою звичайних диференціальних рівнянь (1.2):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}),$$

де $\mathbf{x}$ вектор з компонентами $x_1,\ x_2, ..., x_n$, а $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ вектор–функція з компонентами $X_1(x_1,\ x_2, ..., x_n)\,, X_2(x_1,\ x_2, ..., x_n)\,, ..., X_n(x_1,\ x_2, ..., x_n)$. Нехай початковий стан системи (1.2) задається вектором $\mathbf{x_0}$ с компонентами $x_{10},\ x_{20}, \ldots, x_{n0}$. Припустимо, що в фазовому просторі динамічної системи існують дві множини B і $A \subset B$. Причому B сукупність усіх точок $\mathbf{x_0}$ фазового простору, для яких $\mathbf{x} \in A$ при $t \to +\infty$ або $t \to -\infty$. У цьому випадку множина A називається граничною множиною динамічної системи.

Розглянемо можливі типи граничних множин дисипативної динамічної системи, які можуть існувати в обмеженій області фазового простору.

Якщо всі точки $\mathbf{x_0} \in B$ прямують до A при $t \to +\infty$, то гранична множина є притягувальною й називається атрактором. Відповідно множина

B називається басейном притягання атрактора.

Якщо всі точки $\mathbf{x_0} \in B$ прямують до A при $t \to -\infty$, та гранична множина є відштовхувальною й називається репелером.

Множина B може складатися із двох підмножин, W^s і W^u, причому точки, які належать W^s, прямують до A у прямому часі, у той же час точки, які належать W^u, прямують до A у зворотному часі. У цьому випадку A називається сідловою множиною або просто сідлом. Множини W^s і W^u називаються, відповідно, стійким і нестійким многовидами сідла.

Найпростішою граничною множиною динамічної системи, яка складається з однієї точки, є положення рівноваги. Воно може бути атрактором (стійкий вузол, стійкий фокус), репелером (нестійкий вузол, нестійкий фокус) або сідлом. Причому в сідла стійким і нестійким многовидами є, відповідно, його стійка й нестійка сепаратриси. На рис. 1.1 показані, зліва направо, атрактор (стійкий фокус), репелер (нестійкий фокус) і сідло.

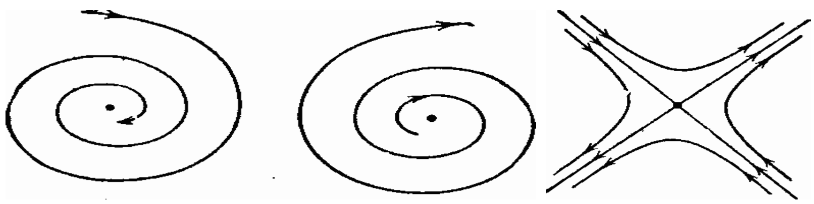


Рис. 1.1: Положення рівноваги: атрактор, репелер і сідло.

Відмітимо, що точка типу центр не є ні атрактором, ні репелером, ні сідлом, тому що відсутня будь-яка множина точок, які наближаються до центру в прямому або зворотному часі. Точка типу центр – це особливий випадок граничної множини, для якої $A = B$.

У свою чергу, граничний цикл динамічної системи буде атрактором, якщо він стійкий, і репелером, якщо він цілком нестійкий. Напівстійкий граничний цикл є сідлом і називається сідловим. На рис. 1.2 зображені зліва направо: граничний цикл, який є атрактором, граничний цикл, який є репелером і сідловий граничний цикл. В зображеного на цьому малюнку граничного циклу стійкий й нестійкий многовиди розташовуються, відповідно, зовні й усередині циклу. Таким чином, атрактор – це гранична множина у фазовому

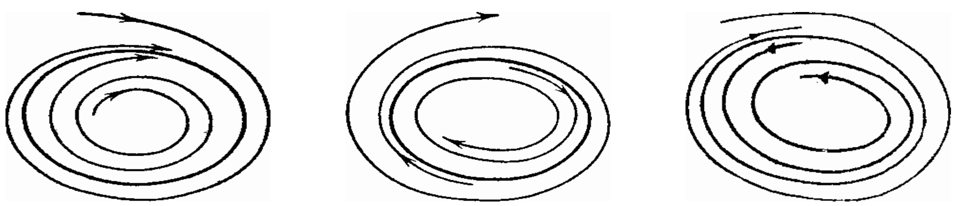


Рис. 1.2: Граничний цикли: атрактор, репелер і сідловий.

просторі, до якого притягаються всі інші траєкторії з басейну притягання. Підкреслимо, що атрактори існують тільки в дисипативних системах.

Рух у дисипативних системах доцільно розділити на два класи: клас перехідних, нестаціонарних рухів, які відповідають процесу переходу від початкової до граничної множини станів, і клас усталених, стаціонарних рухів, фазові траєкторії яких належать граничним множинам. Часто точну границю між цими класами рухів провести неможливо. Ця границя залежить від точності проведених обчислень при розв'язку конкретної задачі.

У загальній теорії динамічних систем доведено, що дисипативна динамічна система може мати наступні типи атракторів:

1. положення рівноваги (точки у фазовому просторі);
2. граничні цикли (замкнені лінії у фазовому просторі);
3. квазіперіодичні атрактори (тороїдальні поверхні у фазовому просторі).

Вище перераховані атрактори називаються регулярними. Їм відповідають повністю передбачувані в часі рухи дисипативних динамічних систем. Довгий час вважалося, що тільки такі типи атракторів існують у динамічних системах. Однак в 60–х роках минулого століття були відкриті зовсім нові типи атракторів у динамічних системах. Виявилося, що рух повністю визначеної (детермінованої) динамічної системи може стати зовсім непередбачуваним (хаотичним). Причому, що особливо важливо, ця непередбачуваність пояснюється властивостями самої динамічної системи, а не будь-яким зовнішнім хаотичним впливом. Однак, при всій своїй непередбачуваності, такі рухи мають ряд чітких кількісних і якісних закономірностей (передбачуваностей), що суттєво відрізняє їх від класичних стаціонарних випадкових процесів. Тому для позначення таких типів рухів динамічних систем став уживатися парадоксальний термін – "детермінований хаос" . В свою чергу, для рухів описуваних регулярними атракторами став уживатися термін – "порядок" .

Математичним образом детермінованого хаосу у фазовому просторі є складним чином улаштовані притягувальні множини, фазові траєкторії яких не належать до жодного типу регулярних атракторів. Фазові траєкторії представляються у вигляді нескінченної лінії, яка ніде не перетинається, не залишає при $t \to +\infty$ замкненої області й не притягається до регулярних атракторів. Зображуюча точка траєкторії час від часу повертається в окіл, довільно обраного на траєкторії початкового стану, однак ці повернення непередбачувані й мають вигляд випадкової послідовності. Такі атрактори називаються дивними (хаотичними). Отже, з однієї сторони є непередбачуваність положення зображуючої точки траєкторії на атракторі в заданий момент часу, а з іншої сторони – у наявності передбачуваність, тому що точно відомо, що ця точка належить атрактору.

1. 4. Типи стійкості траєкторій

Знову розглянемо динамічну систему, задану системою диференціальних рівнянь у векторному вигляді (1.2):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}),$$

і припустимо, що її стан задається n – вимірним вектором $\mathbf{x}(t)$, а векторфункція $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ відображає n – вимірний евклідовий простір R^n у себе. Як було встановлено в численних дослідженнях, основним механізмом виникнення детермінованого хаосу є нестійкість за Ляпуновим траєкторій атрактора. Тому познайомимося зі стійкістю за Ляпуновим та з іншими типами стійкості системи (1.2).

Не обмежуючи загальності, в подальшому початковим моментом часу будемо вважати $t = 0$. Позначимо, відповідний початковому часу стан системи (1.2) через $\mathbf{x}_0$. Точка $\mathbf{x}_0$, а також вихідна з неї траєкторія $\mathbf{x}(t)$ називаються стійкими за Лагранжем, якщо траєкторія $\mathbf{x}(t)$ завжди, при всіх $t > 0$, залишається в деякій обмеженій області фазового простору. Іншими словами, існує така константа M, що для всіх $t > 0$ виконується нерівність $\| \mathbf{x}(t) \| < M$, де $\| \mathbf{x}(t) \|$, як правило, звичайна евклідова норма:

$$\| \mathbf{x}(t) \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Тут $x_1, ..., x_n$ – компоненти вектора $\mathbf{x}$.

Точка n – вимірного фазового простору $\mathbf{y}$ називається ω – граничною точкою фазової траєкторії $\mathbf{x}(t)$, якщо можна вказати таку послідовність моментів часу $t_k \to +\infty$, що $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{y}$. Аналогічно точка $\mathbf{z}$ називається α – граничною, якщо можна вказати таку послідовність моментів часу $t_k \to -\infty$, що $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{z}$. Множина всіх ω – граничних точок називається ω – граничною множиною даної траєкторії й позначається через $\Omega_{\mathbf{x}}$. Відповідно множина всіх α – граничних точок називається α – граничною множиною даної траєкторії й позначається через $A_{\mathbf{x}}$. Траєкторія $\mathbf{x}(t)$ називається стійкою за Пуассоном, якщо кожна її точка є ω – граничною й α – граничною, тобто $\mathbf{x}(t) \in \Omega_{\mathbf{x}} \bigcap A_{\mathbf{x}}$.

З визначення стійкості за Пуассоном випливає, що будь-який усталений режим коливань (як регулярний, так і хаотичний) нелінійних дисипативних систем представляється траєкторіями стійкими за Пуассоном. Зворотне твердження невірне. Дійсно, не кожна стійка за Пуассоном траєкторія представляє режим динаміки, який можна вважати усталеним. Це зв'язане з тим, що сама по собі властивість стійкості за Пуассоном ще нічого не говорить про те, як поводяться сусідні траєкторії, чи притягаються вони до вихідної або віддаляються від неї. Однак завідомо справедливо, що траєкторії, які відповідають перехідним процесам, не є стійкими за Пуассоном.

Розглянемо кілька прикладів різних типів траєкторій. Самою простою траєкторією є положення рівноваги. Така траєкторія складається тільки з однієї точки й, очевидно, стійка за Пуассоном.

Якщо розглянути траєкторію відмінну від нерухомої точки, то, як випливає з визначення, стійкою за Пуассоном вона буде в тому випадку, якщо має властивість повертатися в як завгодно малий окіл кожної своєї точки нескінченне число раз. Повернення траєкторії в ε – окіл довільно обраної на ній початкової точки називається поверненням Пуанкаре.

Тепер розглянемо граничний цикл. Очевидно, що повернення Пуанкаре, в довільно обрану початкову точку циклу, будуть фіксуватися періодично з як завгодно великою точністю (рис. 1.3а). Час повернення T у цьому випадку буде просто періодом циклу. Він не залежить від вибору ε, принаймні, для досить малих ε.

Розглянемо наступний приклад. Припустимо, що для будь-якого заданого ε можна вказати період повернення $T(\varepsilon)$, один і той же для довільної початкової точки на даній траєкторії, причому при $\varepsilon \to 0$ цей період прямує до нескінченності. Отже, повернення з даним ступенем точності слідують одне за іншим регулярно, із правильною періодичністю, однак період зростає, якщо ми бажаємо збільшити точність порівняння станів (рис. 1.3б). Як відомо, такі рухи називаються квазіперіодичними. Зокрема, до них належить суперпозиція двох періодичних коливань із раціонально не порівнянними частотами. У фазовому просторі цьому типу руху відповідає траєкторія, яка всюди щільно покриває тороідальну поверхню.

І нарешті, детермінований хаос – це така ситуація, коли повернення Пуанкаре в ε – окіл початкової точки відбуваються без ознак регулярності, а інтервал часу між двома послідовними поверненнями кожного разу інший. У підсумку спостерігається деяка хаотична послідовність часу таких повернень (рис. 1.3в). Хаотичність таких повернень може допомогти нам ідентифікувати той факт, що в динамічній системі існує дивний атрактор.

Відмітимо, що визначення стійкості по Лагранжу й Пуассону, характеризують будь-яку окремо узяту траєкторію й нічого не говорять про поведінку близьких до неї траєкторій. Таку поведінку описує стійкість за Ляпуновим.

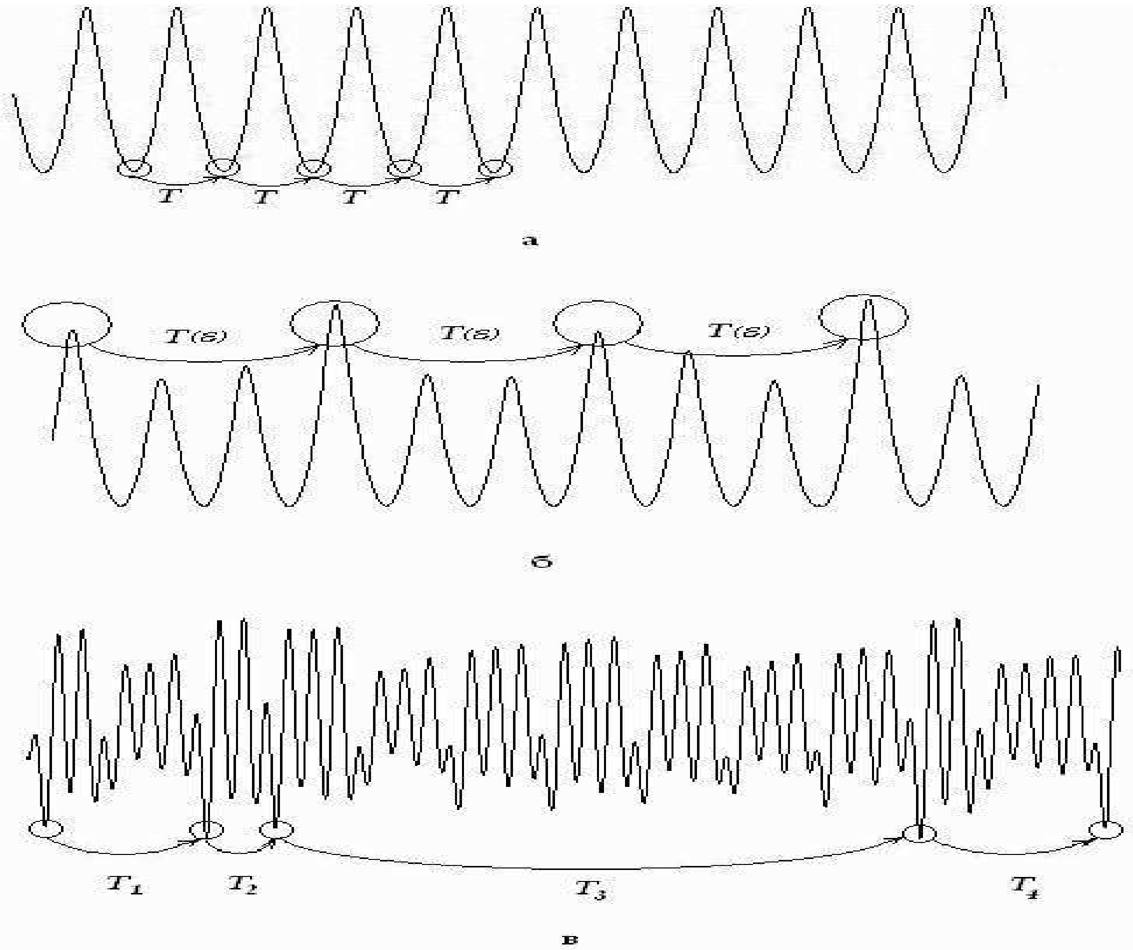


Рис. 1.3: Повернення Пуанкаре.

Припустимо, що система (1.2) при старті із точки $\mathbf{x}_0$ породжує траєкторію $\mathbf{x}(t)$, при старті із точки $\mathbf{y}_0$ – траєкторію $\mathbf{y}(t)$. Траєкторія $\mathbf{x}(t)$ називається стійкою за Ляпуновим, якщо для довільного, як завгодно малого $\varepsilon > 0$, існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої стартової точки $\mathbf{y}_0$, яка задовольняє нерівності

$$\| \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 \| < \delta,$$

при всіх $t > 0$ виконується нерівність

$$\| \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) \| < \varepsilon.$$

Таким чином, якщо дві траєкторії близькі в початковий момент часу, то вони залишаються близькими й у будь-який наступний момент часу.

Траєкторія $\mathbf{x}(t)$ називається асимптотично стійкою, якщо вона стійка за Ляпуновим й $\lim\limits_{t\to+\infty} \| \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) \| = 0$.

Наочна ілюстрація різних типів стійкості наведена на рис. 1.4. Ліворуч показана траєкторія стійка за Лагранжем. Вона увесь час залишається в замкненій області. У центрі траєкторія стійка за Пуассоном. Вона багаторазово повертається в ε – окіл стартової точки. Нарешті, праворуч траєкторія стійка за Ляпуновим. Дві близькі в початковий момент часу траєкторії назавжди залишаються близькими.

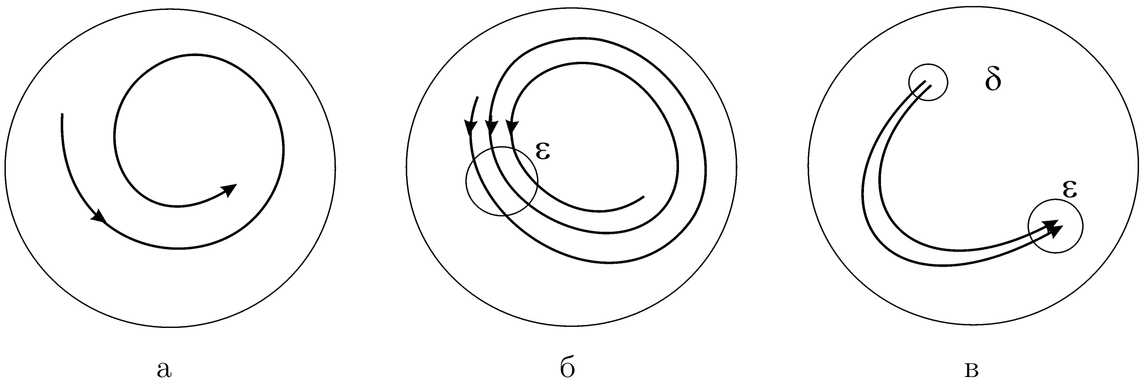


Рис. 1.4: Стійкість за Лагранжем (а), Пуассоном (б) і Ляпуновим (в).

Надалі, якщо противне не застережене спеціально, під стійкістю будемо розуміти стійкість за Ляпуновим.

Має місце наступна теорема, яку наведемо без доказу.

Теорема. Якщо усталена неперіодична траєкторія стійка за Пуассоном та за Ляпуновим, то вона квазіперіодична.

Із цієї теореми відразу випливає, що всі регулярні атрактори динамічних систем (положення рівноваги, граничні цикли й квазіперіодичні атрактори) стійкі як за Пуассоном, так і за Ляпуновим. У свою чергу, всі дивні атрактори динамічних систем стійкі за Пуассоном і нестійкі за Ляпуновим.

1. 5. Спектр ляпуновських характеристичних показників

Розглянемо динамічну систему у векторній формі (1.2). Нехай $\mathbf{x}(t)$ деяка фазова траєкторія цієї системи, яку ми будемо називати незбуреною. Далі, нехай $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$ – близька до незбуреної траєкторія, яка реалізується при незначно зміненій початковій умові. Назвемо траєкторію $\mathbf{y}(t)$ збуреною. Тоді еволюція малого збурення $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ у лінійному наближенні описується рівнянням першого наближення:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(t)\tilde{\mathbf{x}}, \tag{1.5}$$

де матриця $\mathbf{A}(t)$ має вигляд:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_1(x_1(t),\, x_2(t), ..., x_n(t))}{\partial x_1} & . \; . \; . & \dfrac{\partial X_1(x_1(t),\, x_2(t), ..., x_n(t))}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial X_2(x_1(t),\, x_2(t), ..., x_n(t))}{\partial x_1} & . \; . \; . & \dfrac{\partial X_2(x_1(t),\, x_2(t), ..., x_n(t))}{\partial x_n} \\ . & & \\ . & & \\ \dfrac{\partial X_n(x_1(t),\, x_2(t), ..., x_n(t))}{\partial x_1} & . \; . \; . & \dfrac{\partial X_n(x_1(t),\, x_2(t), ..., x_n(t))}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Для системи (1.5) має місце теорема.

Теорема Ляпунова. Нехай існує така константа M, що для всіх елементів A_{ij} матриці A і для довільного T,

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T |A_{ij}(t)| dt \leq M,$$

тоді

1. Для будь-якого розв'язку $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ рівняння (1.5) існує ляпуновський характеристичний показник – дійсне число, відмінне від $\pm\infty$, яке визначається за формулою:

$$\lambda_{\tilde{\mathbf{x}}(t)} = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln \parallel \tilde{\mathbf{x}}(T) \parallel; \tag{1.6}$$

2. При множенні розв'язку на константу C ляпуновський характеристичний показник не змінюється

$$\lambda_{C\tilde{\mathbf{x}}(t)} = \lambda_{\tilde{\mathbf{x}}(t)}; \tag{1.7}$$

3. Ляпуновський характеристичний показник лінійної комбінації двох розв'язків не перевищує більшого з показників цих двох розв'язків

$$\lambda_{C_1\tilde{\mathbf{x}}_1(t)+C_2\tilde{\mathbf{x}}_2(t)} \leq \max(\lambda_{\tilde{\mathbf{x}}_1(t)},\, \lambda_{\tilde{\mathbf{x}}_2(t)}); \tag{1.8}$$

4. Існує n лінійно незалежних розв'язків $\tilde{\mathbf{x}}_i(t)$ (фундаментальна система розв'язків) рівняння (1.5), яким відповідає n ляпуновських характеристичних показників, які нумеруються в порядку спадання $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Доведення цієї теореми наведене в багатьох класичних курсах стійкості руху.

Набір чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ називається спектром ляпуновських характеристичних показників (ЛХП). Найбільше із цих чисел λ_1 називається старшим ляпуновським показником. Спектр ЛХП слід розглядати як характеристику лінійної системи рівнянь (1.5) у цілому, а не якого-небудь одного розв'язку $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, оскільки розв'язок не залежить від вибору фундаментальної системи $\{\tilde{\mathbf{x}}_i(t)\}$. У силу (1.7)–(1.8) для будь-якого розв'язку $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ ляпуновським характеристичним показником обов'язково буде одне з чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

Тепер повернемося до вихідної нелінійної системи рівнянь (1.2). Для кожної траєкторії $\mathbf{x}(t)$ система першого наближення (1.5) дає цілком певний спектр ЛХП. Присутність в цьому спектрі показника λ означає, у силу (1.6), що існує таке збурення вихідної траєкторії, яке еволюціонує в часі, у лінійнім наближенні, як $e^{\lambda t}$. Отже, присутність у спектрі хоча б одного додатного показника означає нестійкість розглянутої траєкторії. Якщо всі показники від'ємні, то це свідчить про асимптотичну стійкість траєкторії.

Можна довести, що для положення рівноваги системи (1.2) спектр ЛХП складається з дійсних частин власних чисел матриці системи першого наближення. Для граничного циклу системи (1.2) спектр ЛХП визначається за формулою:

$$\lambda_i = \frac{\ln|\rho_i|}{T},\ i = 1, ..., n$$

де ρ_i – мультиплікатор граничного циклу, а T – його період.

Дотепер, говорячи про спектр ЛХП, ми приписували його деякій фазовій траєкторії. Задамося тепер більш загальним питанням про стійкість динамічної системи в усталеному режимі, що диктує необхідність визначення спектра ЛХП атрактора. Якщо атрактор являє собою положення рівноваги або граничний цикл, то він складається з однієї траєкторії й уже визначений нами спектр, природно, буде спектром ЛХП такого атрактора. Якщо ж атрактор складається з множини траєкторій, як, наприклад, тор або дивний атрактор, то виникає далеко не очевидне питання, чи можливо приписати атрактору в цілому спектр якої-небудь траєкторії цього атрактора. Отут на допомогу приходить мультиплікативна ергодична теорема В.Оселедця, яка стверджує, що типова, взята навмання, траєкторія на атракторі з одиничною ймовірністю буде мати цілком визначений спектр ЛХП, який можна приписати атрактору в цілому.

Спектр ЛХП атрактора дисипативної динамічної системи повинен задовольняти наступним вимогам:

1. Сума всіх n показників повинна бути від'ємною

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 0.$$

Це умова дисипативності, завдяки якій атрактор є притягувальною граничною множиною нульової міри у фазовому просторі;

2. В атрактора, відмінного від положення рівноваги, обов'язково повинен бути хоча б один нульовий показник.

Дійсно, розглянемо дві траєкторії на атракторі, які стартують, відповідно, з точок $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ і $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}(t_0 + \Delta t)$, де часовий зсув Δt вважається малим. По припущенню, атрактор не є положенням рівноваги, тому $\mathbf{y}_0$ не збігається з $\mathbf{x}_0$. Обидві зображуючі точки слідують по одній траєкторії, тобто відрізняються тільки часовим зсувом, тому

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) \approx \dot{\mathbf{x}}(t)\Delta t = \mathbf{X}(\mathbf{x})\Delta t.$$

Однак праві частини системи (1.2) обмежені по нормі, $\parallel \mathbf{X}(\mathbf{x}) \parallel < M$, тому

$\| \ \mathbf{X}(\mathbf{x})\Delta t \ \| < M|\Delta t|$. Таким чином, ляпуновський характеристичний показник для збурення типу зсуву траєкторій дорівнює:

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\ln \| \mathbf{y}(T) - \mathbf{x}(T) \| = \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\ln M|\Delta t| = 0.$$

Припустимо, що ляпуновські характеристичні показники упорядковані по спаданню. Будемо позначати додатний показник знаком $'+'$, від'ємний – знаком $'-'$, а нульовий – нулем. Тоді атрактору динамічної системи у фазовому просторі розмірності n буде відповідати набір з n знаків, який ми будемо називати сигнатурою спектра ЛХП. Вивчимо якими можуть бути ці сигнатури при різних розмірностях фазового простору.

При $n = 1$ можливий тільки один варіант сигнатури $\langle - \rangle$, що відповідає атрактору у вигляді нерухомої точки – асимптотично стійкому положенню рівноваги.

При $n = 2$ можливі тільки два варіанти сигнатури:

$\langle -, - \rangle$ – стійке положення рівноваги;

$\langle 0, - \rangle$ – граничний цикл.

Покажемо, що при $n = 2$ усі інші варіанти сигнатур неможливі. Дійсно, сигнатури $\langle +, 0 \rangle$, $\langle 0, 0 \rangle$ неможливі, тому що такі сигнатури суперечать умові дисипативності (сума ляпуновських показників не буде від'ємною). Варіант $\langle +, - \rangle$ також виключений, тому що положення рівноваги з такою сигнатурою нестійке й не є атрактором. Якщо ж атрактор не є положенням рівноваги, то така сигнатура виключена в силу умови обов'язкової наявності, в цьому випадку, нульового показника.

Можливість виникнення атрактора з додатним ляпуновським характеристичним показником виникає, починаючи з розмірності фазового простору $n = 3$. Тут можливі такі варіанти сигнатур:

$\langle -, -, - \rangle$ – стійке положення рівноваги;

$\langle 0, -, - \rangle$ – граничний цикл;

$\langle 0, 0, - \rangle$ – двовимірний тор;

$\langle +, 0, - \rangle$ – дивний атрактор.

Усі інші варіанти сигнатур суперечать або умові дисипативності, або – необхідності наявності нульового показника для атракторів, які не є нерухомими точками, або – визначенню атрактора.

При зростанні розмірності фазового простору число можливих варіантів сигнатур суттєво зростає. Наприклад, при $n = 4$ крім дивного атрактора з одним додатним ляпуновським показником $\langle +, 0, -, - \rangle$ може існувати дивний атрактор із двома додатними показниками $\langle +, +, 0, - \rangle$. Дивні атрактори, які мають у спектрі ЛХП більш одного додатного показника, називаються гіперхаотичними.

Таким чином, для динамічних систем, які описуються автономними диференціальними рівняннями, ми прийшли до фундаментального висновку – принципова можливість реалізації дивного атрактора починається з розмірності фазового простору $n = 3$. На фазовій площині існування дивних атракторів неможливо.

До речі, неможливість дивного атрактора на площині може бути доведена такими простими міркуваннями. Будь-який атрактор, у тому числі й дивний, повинен бути стійким за Лагранжем (розташовуватися в обмеженій області фазового простору) і за Пуассоном (зображуюча точка повинна нескінчену кількість разів повертатися в ε – окіл стартової точки траєкторій атрактора). На фазовій площині це обов'язково призведе до самоперетину траєкторії, що суперечить теоремі Коші–Пікара. Отже, дивний атрактор на фазовій площині не може існувати.

Наявність у спектрі ЛХП додатного показника є одним з основних критеріїв ідентифікації дивних атракторів у конкретних прикладних динамічних системах. Тому дуже важливо вміти обчислювати спектр ЛХП або хоча б старший показник спектра. На жаль, для більшості практичних динамічних систем безпосереднє обчислення показника по формулі

$$\lambda = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln \| \tilde{\mathbf{x}}(T) \| \tag{1.9}$$

неможливо, тому що траєкторія атрактора не може бути знайдена для довільної системи за допомогою квадратурних формул. Тому для підрахунку ляпуновських характеристичних показників доводиться застосовувати методики, засновані на чисельних методах. Однією з найбільш застосовуваних таких методик є алгоритм Бенеттіна й ін.

Отже, знову розглянемо динамічну систему (1.2):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}).$$

Процедура обчислення старшого ляпуновского показника починається з побудови чисельного розв'язку системи (1.2) на інтервалі часу, достатньому для того, щоб набути впевненості у виході траєкторії $\mathbf{x}(t)$ на атрактор, тобто відкидаються фазові координати траєкторії, відповідні до перехідного процесу. Тривалість перехідного процесу не підкоряється яким-небудь загальним закономірностям і тому її доводиться визначати індивідуально для кожної конкретної задачі. У якості розрахункового чисельного методу найчастіше застосовується метод Рунге–Кутти четвертого або п'ятого порядку. Для збільшення точності розрахунків доцільно використовувати змінний часовий крок рахунку, проводячи корекцію цього кроку із застосуванням коригувальної процедури Дормана–Прінса. Це дозволяє добитися локальної погрішності обчислень порядку $O(10^{-12})$. Кінцеву точку цього чисельного розрахунку позначимо через $\mathbf{x}_0$ і приймемо її за початкову точку траєкторії на атракторі. Потім виводимо систему рівнянь першого наближення:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \left.\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \tilde{\mathbf{x}}. \tag{1.10}$$

Далі будемо спільно вирішувати системи рівнянь (1.2) і (1.10). Причому для системи рівнянь (1.2) у якості початкової точки беремо $\mathbf{x}_0$, а для системи (1.10) – деяку точку $\tilde{\mathbf{x}}_0$, для якої виконується співвідношення $\| \tilde{\mathbf{x}}_0 \| = 1$. Наприклад, у якості початкового вектора збурювання можна вибрати вектор $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \{1, 0, 0, ..., 0\}$. Задамо деякий часовий інтервал T і розв'яжемо чисельно системи (1.2) та (1.10), знайшовши вектор стану і його збурення в момент часу T: $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_1$, $\tilde{\mathbf{x}}(T) = \tilde{\mathbf{x}}_1$.

Тепер перевизначимо вектор збурення так, щоб його напрямок залишався незмінним, а норма рівнялася вихідному значенню 1, тобто покладемо $\tilde{\mathbf{x}}_1^0 = \dfrac{\tilde{\mathbf{x}}_1}{\parallel \tilde{\mathbf{x}}_1 \parallel}$. Необхідність такого перенормування пов'язана з тим, що в тому випадку, коли траєкторія нестійка (наприклад, належить дивному атрактору), амплітуда збурення дуже швидко прямує до нескінченності й без виконання перенормування відбудеться переповнення регістрів комп'ютера, внаслідок чого комп'ютер зупиниться.

Далі знову продовжуємо процедуру чисельного розв'язку системи (1.2) з початковою точкою $\mathbf{x}_1$ і систему (1.10) з початковою точкою $\tilde{\mathbf{x}}_1^0$. Відшукавши вектор стану й вектор збурення в момент $2T$: $\mathbf{x}(2T) = \mathbf{x}_2$, $\tilde{\mathbf{x}}(2T) = \tilde{\mathbf{x}}_2$ перевизначаємо вектор збурення $\tilde{\mathbf{x}}_2^0 = \dfrac{\tilde{\mathbf{x}}_2}{\parallel \tilde{\mathbf{x}}_2 \parallel}$. Потім багаторазово повторюємо аналогічну процедуру знаходження розв'язків і перенормування.

Якісно алгоритм Бенеттіна можна проілюструвати за допомогою наступного рисунка.

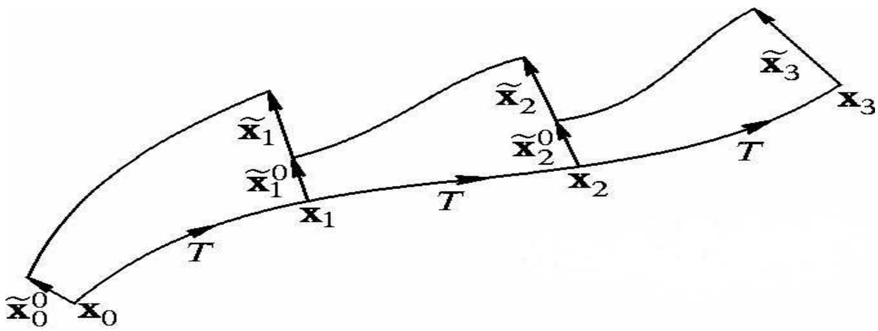


Рис. 1.5: Якісна схема алгоритму Бенеттіна.

Якщо початкова точка $\mathbf{x}_0$ належить типовій траєкторії атрактора, а початкове збурення $\tilde{\mathbf{x}}_0$ взяте навмання, то еволюція амплітуди збурення буде визначатися, мабуть, старшим ляпуновським характеристичним показником. На підставі формули (1.9) приблизно одержимо:

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{KT} \sum_{i=1}^{K} \ln \parallel \tilde{\mathbf{x}}_i \parallel . \tag{1.11}$$

При цьому число кроків K повинно бути досить великим. Практично ми закінчуємо чисельні обчислення, коли значення величини λ_1 стає незмінним після деякої, наперед обраної, кількості знаків після десяткової роздільної точки. Далі описану процедуру бажано повторити кілька разів з різними початковими умовами для вектора стану й вектора збурення та провести статистичну обробку отриманих результатів. Довжина інтервалу перенормування T вибирається індивідуально для кожної конкретної задачі. При комп'ютерних обчисленнях ця величина, з одного боку, не повинна бути дуже великою, щоб не настало переповнення регістрів комп'ютера, а з іншого боку, не повинна бути дуже малою, щоб уникнути дуже тривалого часу обчислень.

Тепер перейдемо до процедури обчислення повного спектра ЛХП атрактора. Для обчислення залишившихся ляпуновських показників необхідно розраховувати еволюцію відповідного числа векторів збурення уздовж розглянутої фазової траєкторії. Якщо проводити розрахунки по вищеописаному алгоритму Бенеттіна й ін., то в будь-якому векторі збурення, при досить великому часі чисельного розрахунку, буде домінувати складова з максимальним ляпуновським показником. Тому для розрахунків наступних показників необхідно модифікувати розрахунковий алгоритм. Такий узагальнений алгоритм був запропонований Бенеттіном і ін. В узагальненому алгоритмі перенормування векторів збурення супроводжується їхньою ортогоналізацією за Грамом-Шмідтом.

Опишемо узагальнений алгоритм Бенеттіна й ін. на прикладі системи з розмірністю фазового простору $n = 3$. У цьому випадку спектр ЛХП складається з трьох показників. Чисельно вирішуємо вихідну систему рівнянь (1.2) на інтервалі часу, достатньому для того, щоб набути впевненості в завершенні перехідного процесу й виході траєкторії на атрактор. Потім вихідну систему рівнянь (1.2) доповнюємо трьома ідентичними копіями її рівнянь першого наближення (1.10). Далі починаємо чисельно вирішувати ці чотири системи. Причому в якості початкових векторів збурень задаємо набір векторів $\tilde{\mathbf{x}}_0^0$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^0$, $\tilde{\mathbf{z}}_0^0$, які утворюють ортонормовану систему векторів. Наприклад, завжди можемо вибрати такі вектори, $\tilde{\mathbf{x}}_0^0 = \{1, 0, 0\}$, $\tilde{\mathbf{y}}_0^0 = \{0, 1, 0\}$, $\tilde{\mathbf{z}}_0^0 = \{0, 0, 1\}$. Через якийсь час T траєкторія системи (1.2) прийде в точку

$\mathbf{x}_1$, вектори збурень, відповідно, будуть рівнятися $\tilde{\mathbf{x}}_1$, $\tilde{\mathbf{y}}_1$, $\tilde{\mathbf{z}}_1$. Перенормуємо їх і ортогоналізуємо за Грамом-Шмідтом:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{x}}_1^0 = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_1}{\parallel \tilde{\mathbf{x}}_1 \parallel};\\
&\tilde{\mathbf{y}}_1' = \tilde{\mathbf{y}}_1 - (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_1^0)\tilde{\mathbf{x}}_1^0,\ \tilde{\mathbf{y}}_1^0 = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_1'}{\parallel \tilde{\mathbf{y}}_1' \parallel};\\
&\tilde{\mathbf{z}}_1' = \tilde{\mathbf{z}}_1 - (\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_1^0)\tilde{\mathbf{x}}_1^0 - (\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_1^0)\tilde{\mathbf{y}}_1^0,\ \tilde{\mathbf{z}}_1^0 = \frac{\tilde{\mathbf{z}}_1'}{\parallel \tilde{\mathbf{z}}_1' \parallel}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Тут $(.,.)$ означає скалярний добуток векторів. Далі продовжуємо чисельні розрахунки, відправляючись від точки $\mathbf{x}_1$ і векторів збурень $\tilde{\mathbf{x}}_1^0$, $\tilde{\mathbf{y}}_1^0$, $\tilde{\mathbf{z}}_1^0$. Потім через черговий інтервал часу T одержимо новий набір векторів збурень $\tilde{\mathbf{x}}_2$, $\tilde{\mathbf{y}}_2$, $\tilde{\mathbf{z}}_2$, який знову ортогоналізуємо і перенормуємо відповідно до процедури (1.12). Описана послідовність дій повторюється досить велику кількість разів K. У ході проведених обчислень визначаємо суми:

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^{K} \ln \parallel \tilde{\mathbf{x}}_i \parallel, \qquad \Lambda_2 = \sum_{i=1}^{K} \ln \parallel \tilde{\mathbf{y}}_i' \parallel, \qquad \Lambda_3 = \sum_{i=1}^{K} \ln \parallel \tilde{\mathbf{z}}_i' \parallel . \tag{1.13}$$

У цих сумах фігурують вектори збурень до перенормування. Тоді ляпуновські характеристичні показники приблизно визначаються за формулами:

$$\lambda_i \approx \frac{\Lambda_i}{KT}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1.14}$$

Аналогічно визначається спектр ЛХП при довільній розмірності фазового простору.

1. 6. Переріз і відображення Пуанкаре

Розглянемо динамічну систему з неперервним часом, динаміка якої описується деякими диференціальними рівняннями. Нехай, для визначеності, це система із тривимірним фазовим простором виду:

$$\dot{x} = f_1(x, y, z);$$

$$\dot{y} = f_2(x, y, z); \tag{1.15}$$

$$\dot{z} = f_3(x, y, z).$$

Далі розглянемо деякий розв'язок системи (1.15), якому відповідає у фазовому просторі траєкторія Г. Помістимо в фазовому просторі деяку площину S, рівняння якої має вигляд:

$$S(x, y, z) = 0. \tag{1.16}$$

Вибір такої площини досить довільний, однак вона повинна розміщатися так, щоб траєкторія Г багаторазово її перетинала і дотик траєкторії до площини був неможливий (трансверсальне перетинання). Така площина S називається січною Пуанкаре фазової траєкторії Г. Позначимо точки перетину траєкторії Г с січною S через a_1, $a_2, ..., a_n$ (рис. 1.6). Відмітимо, що послідовність точок $\{a_n\}$ задається перетинами Г з S в одному напрямку. Отримана дискретна множина точок $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, ...$ на січній Пуанкаре називається перерізом Пуанкаре для траєкторії Г.

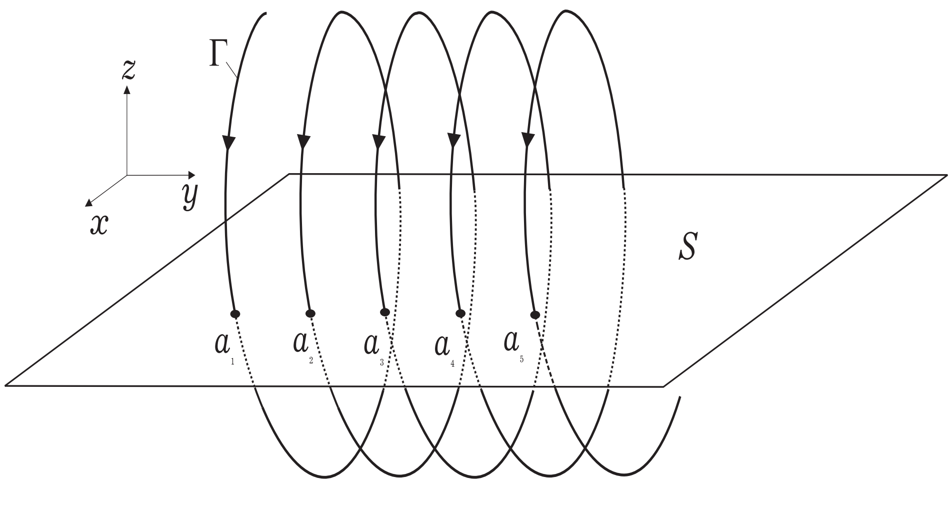


Рис. 1.6: Переріз Пуанкаре.

Переріз Пуанкаре також породжує деяке дискретне відображення, яке ставить у відповідність будь-якій точці a_n найближчу наступну за a_n точку

a_{n+1}. Закон відповідності між попередньою й наступною точками перерізу Пуанкаре називається відображенням послідування або відображенням Пуанкаре. Для розглянутого тривимірного випадку це відображення буде вже двовимірним

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P_1(x_n, y_n); \\ y_{n+1} &= P_2(x_n, y_n), \end{aligned} \tag{1.17}$$

тому що точки перерізу Пуанкаре розташовуються на площині й третю координату завжди можна виразити через дві перші.

Таким чином, задача вивчення динамічної системи (1.15) може бути зведена до задачі вивчення відповідного відображення Пуанкаре, яке має розмірність на одиницю меншу, ніж розмірність вихідної динамічної системи. При цьому структура динамічної системи однозначно (але не взаємно однозначно) визначає структуру породжуваного нею дискретного відображення (1.17). Ця підміна об'єкта дослідження не супроводжується будь-якими апроксимаціями, аналіз залишається точним. Однак при такій підміні об'єкта дослідження ми втрачаємо інформацію про характер динаміки в проміжках часу між послідовними перетинами січної площини, зокрема, про тривалість інтервалів часу між цими перетинами й про топологічні властивості фазової траєкторії. Проте зберігається можливість аналізувати багато принципових питань, наприклад, виникає в системі регулярний або хаотичний режим.

Нехай дискретні рівняння (1.17) є відображенням Пуанкаре диференціальних рівнянь (1.15). Припустимо, що (x_0, y_0) – стійка нерухома точка цього відображення. Їй буде відповідати стійкий однотактний граничний цикл системи (1.15).

Припустимо, що дискретні рівняння (1.17) мають періодичний розв'язок:

$$x_{n+k} = x_n, \;\; y_{n+k} = y_n, \tag{1.18}$$

де k – дискретний період. Такий розв'язок будемо називати k – циклом. Тоді k – циклу відображення буде відповідати більш складний k – тактний граничний цикл системи (1.15). Причому спектр ЛХП такого k – циклу дискретного відображення (1.17), доповнений нульовим показником, збігається зі спектром ЛХП системи.

Якщо розв'язком дискретної системи (1.17) є квазіперіодична або хаотична послідовність, то відповідно квазіперіодичний або хаотичний режим буде встановлюватися в системі диференціальних рівнянь (1.15). При цьому спектри ЛХП квазіперіодичних і хаотичних відображень збігаються з відповідними спектрами ЛХП квазіперіодичних або хаотичних атракторів системи (1.15) за винятком одного нульового показника.

Знайти відображення Пуанкаре для конкретних нелінійних систем у явному виді вдається дуже рідко, у тих виняткових випадках, коли диференціальні рівняння допускають аналітичний розв'язок. Однак можна побудувати відображення Пуанкаре як чисельний алгоритм. При цьому виникають дві самостійні задачі. Перша – це знаходження деякої траєкторії Γ системи (1.15) при заданих початкових умовах. Друга – це визначення координат точок перетину траєкторії з січною площиною, тобто побудова перерізу й відображення Пуанкаре. Розрахувати траєкторію можна за допомогою будь-якого відомого чисельного методу. Як ми вже відзначали, для цього найчастіше застосовуються методи Рунге–Кутти. А для визначення точок перетину траєкторії з січною площиною необхідно на кожному кроці чисельного інтегрування системи (1.15) обчислювати значення функції $S(x, y, z)$ доти, поки не буде зафіксований момент зміни знака $S(x, y, z)$, який відповідає моменту перетину траєкторією січної площини.

Наприклад, нехай зміна знака функції $S(x, y, z)$ трапилася між n – тим і $(n+1)$ кроками, так що величини $S_n = S(x(n\Delta t), y(n\Delta t), z(n\Delta t))$ і $S_{n+1} = S(x((n+1)\Delta t), y((n+1)\Delta t), z((n+1)\Delta t))$, де Δt – крок чисельного інтегрування, мають різні знаки, як показано на рис. (1.7). Далі необхідно уточнити значення точки перетину a_s. Цю задачу можна розв'язати з заданим ступенем точності, застосувавши методи інтерполяції. Послідовно зменшуючи крок інтегрування у два рази, можливо закінчити обчислення, коли різниця

$|S_{n+1} - S_n|$ буде менше наперед заданої величини, яка визначає точність розрахунків точок a_s. Принципових труднощів тут немає, однак зростаючі вимоги до точності визначення a_s зажадають додаткових обчислень, що ускладнить відповідні алгоритми обчислення й значно збільшить час необхідний для розрахунків.

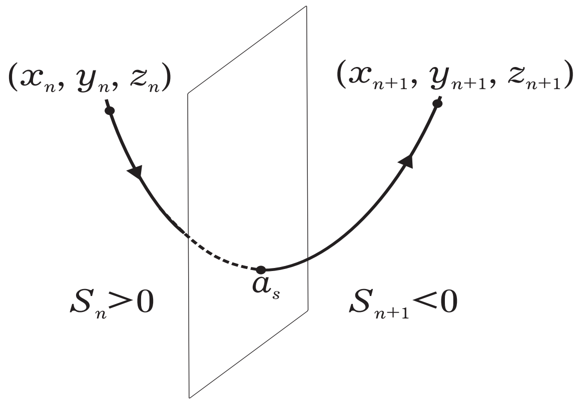


Рис. 1.7:

Для подолання цих складностей М.Ено був запропонований простий і економічний метод, який полягає в наступному. Доповнимо систему рівнянь (1.15) ще одним співвідношенням, а саме

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial S}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Так як $(\dot{}) = \dfrac{d}{dt}$, то, враховуючи (1.15), можемо записати

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} f_1(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial y} f_2(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial z} f_3(x, y, z). \qquad (1.19)$$

Введемо для зручності позначення

$$H(x, y, z) = \frac{\partial S}{\partial x} f_1(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial y} f_2(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial z} f_3(x, y, z),$$

$$\frac{dS}{dt} = H(x, y, z).$$

Тоді, враховуючи, що

$$\frac{dx}{dS} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{dS}, \ \frac{dy}{dS} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dS}, \ \frac{dz}{dS} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dS}, \ \frac{dt}{dS} = \frac{1}{H(x, y, z)},$$

можемо записати

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dS} &= \frac{f_1(x,y,z)}{H(x,y,z)};\\
\frac{dy}{dS} &= \frac{f_2(x,y,z)}{H(x,y,z)};\\
\frac{dz}{dS} &= \frac{f_3(x,y,z)}{H(x,y,z)};\\
\frac{dt}{dS} &= \frac{1}{H(x,y,z)}.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Візьмемо значення x, y, z, t і S, отримані на $(n+1)$ кроці чисельного інтегрування й зробимо ще один крок по S, величина якого рівна

$$\Delta S = -S_{n+1}.$$

У результаті інтегрування системи (1.20) тільки на одному кроці $\Delta S = -S_{n+1}$ ми відразу попадемо на січну S, причому помилка визначення точки перетину строго дорівнює похибці інтегрування системи (1.20) на одному кроці й буде мінімальною. При знаходженні інших точок перетину(якщо вони існують) траєкторією Γ площини S щоразу будемо інтегрувати систему (1.20) на одному кроці $\Delta S = -S_{n+1}$, який буде змінюватися для кожної нової точки перетину.

Алгоритм побудови відображення Пуанкаре по методу Ено зручно програмувати відразу як чисельний розв'язок рівнянь (1.20). При цьому функція $H(x,y,z)$ покладається рівній одиниці до тих пір, поки виконуються стандартні кроки за часом, і перевизначається відповідно до (1.19), коли виникає необхідність провести нестандартний крок по S. Так як в обох випадках використовується той самий чисельний метод, досягається бажане узгодження по точності.

Усі проведені міркування очевидним образом поширюються на фазовий простір більшої розмірності, тільки замість січної двовимірної площини необхідно використовувати переріз n – вимірного фазового простору гіперповерхнею розмірності $n-1$. Та обставина, що при використанні відображення Пуанкаре розмірність зменшується на одиницю, іноді буває дуже корисною.

Метод перерізу Пуанкаре особливо наочний у випадку $n = 3$, коли множина точок перетину лежить на двовимірній поверхні. Для $n > 4$ графічне представлення багатовимірного перерізу Пуанкаре втрачає наочність. У цих випадках аналізують дво- або тривимірні проекції перерізів Пуанкаре.

Для періодичних розв'язків динамічної системи переріз Пуанкаре, як багатовимірний, так і його проекції, містять скінчене число нерухомих точок, які повторюються строго через період розв'язку. У режимі дивного атрактора на січній з'явиться деяка хаотична множина точок, число яких буде зростати зі зростанням часу чисельного інтегрування. У деяких випадках ця хаотична множина може розташовуватися уздовж тонкої стрічки, близької за структурою до одновимірної кривої на січній. Цю криву приблизно можна прийняти за відображення Пуанкаре й аналізувати методом діаграм Ламерея.

Слід зазначити, що при вивченні хаотичних режимів достовірну інформацію про структуру перерізу Пуанкаре можна одержати тільки при досить великій кількості точок у перерізі Пуанкаре. Як правило, це число має порядок $O(10^4) - O(10^5)$, тому для представлення таких точкових множин необхідно використовувати комп'ютерні методи обробки інформації.

1. 7. Розмірність атракторів

Як ми вже відзначали, математичним образом детермінованого хаотичного режиму в динамічній системі є дивні атрактори, які мають надзвичайно складну геометричну структуру. Однією з важливих характеристик будь-якого геометричного об'єкта є його розмірність. До теперішнього часу в розгляд введено багато типів розмірностей для атракторів динамічних систем. Наприклад, фрактальна ємність, розмірність Хаусдорфа–Безіковича, інформаційна й кореляційна розмірності, узагальнені розмірності Рены і.т.п. Такі розмірності можуть надавати істотну інформацію про структуру атрактора, служити кількісною ознакою відмінності регулярного атрактора від дивного, а для дивних атракторів виступати як якась міра "дивності" атрактора.

Практично всі відомі дивні атрактори є фрактальними множинами, які мають дробову розмірність Хаусдорфа–Безіковича. Цим вони відрізняються від регулярних атракторів, відповідна розмірність яких є цілою. Безпосередній підрахунок фрактальної розмірності дивного атрактора є надзвичайно трудомісткою задачею, для розв'язку якої в загальному випадку не існує будь-яких стандартних алгоритмів. Однак порівняно просто може бути підрахована так звана ляпуновська розмірність атрактора, яка на практиці найчастіше використовується в якості кількісної міри фрактальності.

Розглянемо дисипативну динамічну систему розмірності n. Поряд з вихідною динамічною системою розглянемо ансамбль її ідентичних копій, які відрізняються одна від одної тільки різними початковими станами. В початковий момент часу у фазовому просторі цьому ансамблю буде відповідати якась "хмара" зображуючих точок. В процесі еволюції початкова хмара буде змінюватися відповідно до динаміки системи, яка задається її математичною моделлю.

Припустимо, що в розглянутої динамічної системи існує дивний атрактор. Спектр ЛХП такого атрактора складається з n показників, упорядкованих по спаданню λ_1, $\lambda_2, ..., \lambda_n$. Причому $\lambda_1 > 0$ та існує принаймні один нульовий показник. Крім того, у силу дисипативності системи, сума всіх ляпуновських характеристичних показників від'ємна:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 0. \tag{1.21}$$

Будемо послідовно обчислювати суми вигляду (1.21) для $m = 1, 2, ...$. Спочатку ми будемо одержувати додатні, а потім від'ємні величини σ_m. Знайдемо таке m, що $\sigma_m \geq 0$, але $\sigma_{m+1} < 0$. У суму σ_m увійдуть усі додатні, усі нульові й частина від'ємних ляпуновських характеристичних показників. Якщо розглянути підпростір, утворений векторами збурень, які відповідають першим m ляпуновським показникам, то в цьому підпросторі об'єм хмари зображуючих точок ансамблю систем не зменшується в процесі еволюції. Зокрема, цей об'єм зростає при $\sigma_m > 0$. У той же час у підпросторі утвореним векторами збурень, які відповідають першим $m+1$ характеристичним показникам, об'єм хмари зображуючих точок буде зменшуватися при зростанні часу.

В 1979 році Каплан і Йорк запропонували гіпотезу, суть якої полягає в тому, що фрактальна розмірність атрактора D_{Fr} розташована в інтервалі

$$m \leq D_{Fr} < m + 1$$

і складається із цілої m і деякої дробової частини d, так що

$$D_{Fr} = m + d.$$

Причому ця дробова частина розмірності визначається з умови, що рух на атракторі відповідає фізичним представленням про стаціонарність процесу, а саме:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m + d\lambda_{m+1} = 0.$$

Звідси одержуємо, що розмірність атрактора D_{Fr} визначається за формулою:

$$D_{Fr} = m + \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|}. \tag{1.22}$$

Формула (1.22) зараз називається формулою Каплана–Йорка.

В частинному випадку тривимірного фазового простору впорядкований спектр ЛХП дивного атрактора містить три показники, $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, причому $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, а $\lambda_3 < 0$. У силу умови дисипативності: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$. Тому $\sigma_1 = \lambda_1 > 0$; $\sigma_2 = \lambda_1 + 0 > 0$; $\sigma_3 < 0$. Отже, у тривимірному випадку, формула (1.22) приймає вигляд:

$$D_{Fr} = 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|}. \tag{1.23}$$

Формула Каплана–Йорка використовується, у першу чергу для підрахунку фрактальних розмірностей дивних атракторів, але за нею легко можуть бути розраховані розмірності й регулярних атракторів. Так, використовуючи формулу (1.23), легко знайдемо, що в тривимірному просторі розмірність граничного циклу дорівнює одиниці, а квазіперіодичного атрактора – двом. Для положень рівноваги формула Каплана–Йорка незастосовна. Однак у цьому випадку розмірність елементарно підраховується за загальним визначенням Хаусдорфа і завжди дорівнює нулю.

Таким чином, у тривимірному фазовому просторі фрактальні розмірності можливих атракторів неперервної динамічної системи дорівнюють:

1. для положень рівноваги, $D_{Fr} = 0$;
2. для граничних циклів, $D_{Fr} = 1$;
3. для квазіперіодичних атракторів, $D_{Fr} = 2$;
4. для дивних атракторів, $2 < D_{Fr} < 3$.

Цілість або дробовість розмірності D_{Fr} є зручною ознакою для ідентифікації регулярності або дивності атрактора.

Гіпотеза Каплана–Йорка припускала, що формула (1.22) дозволяє обчислювати хаусдорфову розмірність атракторів. Однак строго довести це вдалося тільки для хаотичних атракторів двовимірних дискретних відображень і систем диференціальних рівнянь з розмірністю фазового простору $n = 3$ [6]. У загальному випадку довести гіпотезу Каплана–Йорка поки не вдається. Більшість дослідників взагалі схиляється до того, що вона невірна для багатовимірних систем.

У той же час формула (1.22) дає гарну чисельну оцінку розмірності атрактора. Тому розмірність, обчислену за формулою (1.22), зараз називають ляпуновською і вважають ще одним різновидом фрактальної розмірності. Головна перевага ляпуновської розмірності полягає у відносній простоті її підрахунку, для чого потрібний тільки спектр ЛХП. Труднощі, що виникають при підрахунку фрактальної розмірності, виходячи з визначення Хаусдорфа, значно перевищують складність знаходження спектра ЛХП.

У процесі обчислення ляпуновської розмірності ми послідовно обчислюємо суми σ_m. Позначимо через h максимальне значення сум σ_m. Величина

h дорівнює сумі всіх додатних ляпуновських характеристичних показників атрактора. Доведено, що h відповідає так званій ентропії Колмогорова–Сіная. Очевидно, що для хаотичних атракторів величина h завжди додатна, для граничних циклів і квазіперіодичних атракторів вона дорівнює нулю (тому що в останніх випадках додатні ляпуновські показники відсутні). Таким чином, додатність ентропії є ще одним критерієм хаосу. Відмітимо, що в теорії ймовірностей доводиться, що для стаціонарних випадкових процесів $h = \infty$. Тому по величині ентропії також можна ідентифікувати, спостерігається в динамічній системі стаціонарний випадковий процес чи детермінований хаос.

1. 8. Спектральна густина та інваріантна міра

Знову розглянемо динамічну систему загального виду (1.2). Припустимо, що система має атрактор у вигляді граничного циклу, якому відповідає деякий періодичний, з періодом T, розв'язок $\mathbf{x}(t)$. Нехай вектор-функція $\mathbf{x}(t)$ має компоненти

$$\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\}, \tag{1.24}$$

де кожна з функцій $x_i(t)$ – періодична, з періодом T. Як відомо, періодична функція $x_i(t)$ може бути розкладена в ряд Фур'є:

$$x_i(t) = c_{0,i} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,i} \cos(k\omega_1 t - \varphi_{k,i});\ \ i = 1, 2, ..., n, \tag{1.25}$$

де $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$ – основна кругова частота $\varphi_{k,i}$ – фаза. З цієї формули видно, що кожна з періодичних функцій $x_i(t)$ цілком визначається сукупністю величин $c_{k,i}$, $\varphi_{k,i}$. Сукупність величин $c_{k,i}$ називається спектром амплітуд, а сукупність $\varphi_{k,i}$ – спектром фаз функції $x_i(t)$. В багатьох застосуваннях достатньо знати тільки спектр амплітуд. Він застосовується настільки часто, що коли говорять просто спектр, то мають на увазі амплітудний спектр. Спектр періодичної функції дуже просто зобразити графічно. В декартовій системі координат $O\omega c$ по осі абсцис відкладаються частоти $\omega = k\omega_1$, а по осі ординат – амплітуди $c = c_{k,i}$. Потім точки з координатами $(k\omega_1; 0)$ і $(k\omega_1; c_{k,i})$ з'єднуються відрізками прямих, які називаються спектральними лініями. У результаті кожній гармоніці розкладу в ряд Фур'є (1.25) буде відповідати цілком певна спектральна лінія. Ми одержимо спектр, який складається з рівновіддалених спектральних ліній. Причому частоти гармонік знаходяться у простих кратних співвідношеннях. Такий спектр називається дискретним гармонічним спектром.

Відмітимо, що для всіх компонентів вектор–функції (1.24) ми одержимо дискретні гармонічні спектри, спектральні лінії яких мають однакові частоти й відрізняються тільки висотою. Тому, для якісного вивчення спектра досить обмежитися побудовою спектра однієї з компонент вектора–функції. Як правило, на практиці спектральні властивості багатомірних динамічних систем вивчаються на прикладі однієї з компонент вектор–функції стану, що суттєво спрощує задачу, але в той же час дозволяє досліджувати характерні особливості одержуваних спектрів.

Тепер нехай вихідна динамічна система (1.2) має квазіперіодичний атрактор. У цьому випадку розв'язок системи $\mathbf{x}(t)$, що відповідає атрактору, буде квазіперіодичною вектор–функцією. Будемо вивчати спектральні характеристики атрактора за допомогою однієї з компонент $\mathbf{x}(t)$, яку позначимо, опускаючи індекс, через $x(t)$. Квазіперіодична функція $x(t)$ може бути записана у вигляді:

$$x(t) = x(\psi_1(t), \psi_2(t), ..., \psi_p(t)), \tag{1.26}$$

де функція $x(\psi)$ має період 2π по кожному з аргументів ψ_i і між частотами ω_i не існує раціональних співвідношень. Використовуючи розкладання функції (1.26) в узагальнений ряд Фур'є, можна показати, що в цьому випадку спектр представляється у вигляді дискретної сукупності спектральних ліній. Однак, на відміну від періодичного випадку, ці лінії не рівновіддалені, а розташовуються на частотах, які являють собою лінійні комбінації базових частот:

$$\omega_{k_1,...k_p} = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + .. + k_p\omega_p.$$

Припустимо, що вихідна система має дивний атрактор, одна з траєкторій якого $\mathbf{x}(t)$. Спектральні властивості будемо вивчати за допомогою однієї з компонент вектор-функції $\mathbf{x}(t)$, яку позначимо через $x(t)$. У цьому випадку функція $x(t)$ буде неперіодичною, тому замість розкладання в ряд Фур'є необхідно користуватися інтегралом Фур'є. Нагадаємо, що для неперіодичної функції мають місце наступні співвідношення:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \tag{1.27}$$

де

$$S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \tag{1.28}$$

Формули (1.27) і (1.28) є основними формулами теорії спектрів. Зміст формули (1.27) полягає в тому, що функція $x(t)$ представляється сумою нескінченно великого числа нескінченно малих коливань, які як завгодно близькі по частоті. Комплексна амплітуда C кожного окремого коливання нескінченно мала й дорівнює:

$$dc = \frac{1}{\pi} S(\omega) d\omega. \tag{1.29}$$

Частотний інтервал між двома сусідніми коливаннями також нескінченно малий. Він дорівнює $d\omega$.

Величина $S(\omega)$ називається комплексним спектром неперіодичної функції, а її модуль $\Phi(\omega) = |S(\omega)|$ просто спектром. В цьому випадку інтервали між окремими спектральними лініями необмежено скорочуються й спектр може бути представлений неперервною лінією, що обгинає сімейства спектральних ліній. Такого роду спектр називається суцільним (неперервним).

Так як з формули (1.29) випливає, що

$$S(\omega) = \pi \frac{dc}{d\omega},$$

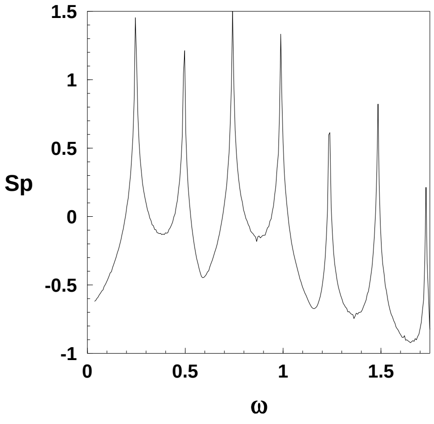
то величина $S(\omega)$ виражає не безпосередньо амплітуду, а так звану спектральну густину. Тому такий спектр називається спектром густини коливань або Фур'є–спектром.

Побудова Фур'є–спектрів для атракторів конкретних динамічних систем викликає деякі труднощі, тому що часто невідомий аналітичний запис розв'язку динамічної системи, відповідного тим або іншим траєкторіям атрактора. Крім того, при побудові спектра можуть виникнути проблеми при обчисленні інтеграла Фур'є на нескінченному проміжку. Тому діють наступним чином. Чисельним методом знаходиться будь–яка типова траєкторія атрактора. Подальша побудова спектра атрактора, незалежно від того регулярний він або дивний, проводиться за допомогою перетворення Фур'є (1.28). Причому інтегрування проводилося на проміжку:

$$S(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} x(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{1.30}$$

де t_0 - тривалість перехідного процесу (тобто час за який траєкторія, що стартує в початковий момент часу $t = 0$, виходить на атрактор), t_1 – деякий, розумно обраний момент часу, у який ми припиняємо інтегрування. Природно, проінтегрувати (1.30) ми зможемо тільки чисельно, застосувавши один із наближених методів інтегрування. Якщо траєкторія належить граничному циклу або квазіперіодичному атрактору, то можна застосувати порівняно простий метод Сімпсона. Якщо ж траєкторія належить дивному атрактору або атрактору, який ми перевіряємо на "дивність" , то доцільно застосовувати більш громіздкий, але й значно більш точний метод Файлона.

Які ж Фур'є–спектри ми одержимо для різних типів атракторів? Якщо атрактор є граничним циклом, то спектральна густина має вигляд, якісно подібний наведеному на рис.1.8а. По осі абсцис відкладена частота, а по осі ординат $Sp = \lg|s(\omega)|$. Спектр буде представляти собою неперервну лінію із чіткими локальними максимумами в точках $\omega = k\omega_1$. Логарифмічне масштабування по осі ординат тут застосовується з метою зменшення розмірів графіка. При $t_1 \to +\infty$ значення максимумів можуть трохи змінюватися. Ознакою оптимальності вибору значення t_1 буде припинення зміни величин Sp з точністю до певного числа знаків після десяткової точки.



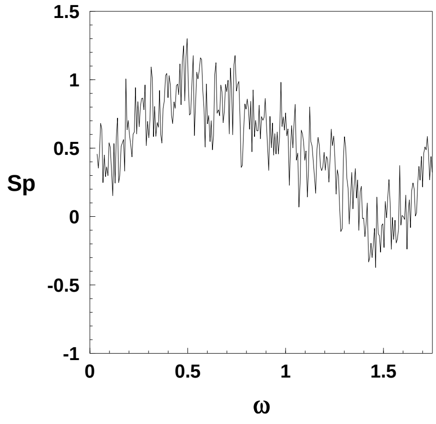


Рис. 1.8: Типові розподіли спектральної густини для граничного циклу (а) і хаотичного атрактора (б).

Якщо траєкторія належить інваріантному тору, то зовнішній вигляд типового Фур'є–спектра, на перший погляд, буде подібний наведеному на рис.1.8а. Тобто також будемо мати неперервну лінію із чіткими максимуми (піками). Але по осі абсцис ці піки будуть не рівновіддаленими, а розташовуватися в точках, які являють собою лінійну комбінацію раціонально непорівнянних частот тора.

Нарешті, якщо траєкторія належить дивному атрактору, то має місце велика різноманітність у виглядах Фур'є–спектра. Можливий вид спектра дивного атрактора наведений на рис.1.8б. На відмінність від регулярних атракторів, які мають дискретний спектр, спектр дивного атрактора суцільний (неперервний). Таким чином, наявність в атрактора суцільного Фур'є–спектра може служити ще однією ознакою того, що атрактор дивний.

Нарешті коротко познайомимося з поняттям інваріантної міри атрактора. Нехай ми маємо ансамбль ідентичних динамічних систем вигляду (1.2), які відрізняються тільки початковими умовами, і нехай D – деяка обмежена область фазового простору. Цій області припишемо міру $\mu(D)$, яка рівна відносному числу представників ансамблю, стани яких належать області D.

Об'єднання неперетинаючихся областей $D_1, ..., D_n$ буде мати міру, рівну сумі мір цих областей

$$\mu(D_1 \bigcup D_2 \bigcup ... \bigcup D_n) = \mu(D_1) + \mu(D_2) + ... + \mu(D_n).$$

У силу динаміки індивідуальних систем, які становлять ансамбль, приписана різним підмножинам фазового простору міра буде, взагалі кажучи, змінюватися із часом. Припустимо, що початковий розподіл зображуючих точок спеціально підібраний так, що міра будь-якої вимірної підмножини, розташування якої в фазовому просторі фіксоване, увесь час залишається незмінною. Відповідна міра називається інваріантною мірою для динамічної системи, яка фігурує в якості індивідуального елемента ансамблю.

Якщо динаміка системи регулярна й протікає в обмеженій області фазового простору, то інваріантна міра завжди існує (теорема Крилова – Боголюбова). Більше того, інваріантних мір може бути багато. Але серед усіх інваріантних мір основний інтерес становить природна інваріантна міра або міра Крилова – Боголюбова. Припустимо, що початкова точка динамічної системи належить басейну притягання деякого атрактора. Для довільної області D міру $\mu(D)$ визначимо в відповідності зі співвідношенням:

$$\mu(D) = \lim_{T\to\infty} \frac{\tau(D, \mathbf{x}_0, T)}{T}, \tag{1.31}$$

де $\mathbf{x}_0$ – точка старту фазової траєкторії, $\tau(D, \mathbf{x}_0, T)$ – час знаходження зображуючої точки в області D при спостереженні за інтервал часу T. Якщо введена в такий спосіб міра виявляється однією й тією ж майже при будь-якому виборі початкової точки, то це й буде інваріантна міра.

Математичні доведення, які відносяться до загальних властивостей атракторів, як правило, виходять із припущення про наявність однозначно визначеної інваріантної міри. Однак до теперішнього часу строго довести існування природної інваріантної міри для більшості, отриманих у прикладних задачах, дивних атракторів не вдається. Проте чисельно побудовані інваріантні міри часто бувають дуже корисними при вивченні хаотичної поведінки динамічних систем.

Коротко зупинимося на практичному алгоритмі побудови природної інваріантної міри атрактора. Спочатку ми чисельно будуємо будь-яку траєкторію, що належить атрактору, і запам'ятовуємо масив значень її фазових координат. Далі будуємо цікавлючу нас проекцію фазового портрета на екрані комп'ютера, використовуючи отриманий масив фазових точок. При цьому застосовуємо техніку кодування зображення відтінками деякого заздалегідь вибраного кольору, наприклад, чорного або червоного. Послідовно виводимо на екран фазові точки, причому при попаданні в певний піксель екрана декількох точок пропорційно їх кількості збільшуємо цифровий код яскравості даного пікселя. При досить великій кількості точок у масиві координат фазової траєкторії ми одержимо проекцію фазового портрета, одні частини якої будуть зображені більш яскраво, ніж інші. Яскраві частини фазового портрета відповідають тим областям, у які зображуюча точка попадає частіше, а більш темні – областям куди зображуюча точка попадає рідше. Таким чином, ми практично одержимо проекції розподілу природної інваріантної міри по фазовому портрету атрактора. Такі розподіли бувають дуже корисними при вивченні сценаріїв переходів до хаосу.

1. 9. Питання для самоконтролю

1. Що розуміється під динамічною системою.

2. Коли математична модель динамічної системи вважається заданою.

3. Як визначається фазовий простір динамічної системи.

4. Що таке граничний цикл.

5. Які типи траєкторій можливі в фазовому просторі динамічної системи.

6. Як визначається динамічна система за допомогою теоретико–групових властивостей.

7. Що таке потік і каскад.

8. Як класифікуються динамічні системи.

9. Як визначаються атрактори та репелери.

10. Що таке сідлова множина.

11. На які класи розділяють рухи у дисипативних динамічних системах.

12. Які атрактори називаються регулярними.

13. Як визначити дивний (хаотичний атрактор).

14. Яка траєкторія динамічної системи буде стійкою за Лагранжем.

15. Що таке ω–граничні та α–граничні точки траєкторії.

16. Яка траєкторія динамічної системи буде стійкою за Пуассоном.

17. Що таке повернення Пуанкаре.

18. Як відбуваються повернення Пуанкаре для різних типів траєкторій.

19. Яка траєкторія динамічної системи буде стійкою за Ляпуновим.

20. Як визначається ляпуновський характеристичний показник.

21. Що таке спектр ЛХП (ляпуновських характеристичних показників).

22. Яким вимогам повинен задовольняти спектр ЛХП дисипативної динамічної системи.

23. Що таке сигнатура спектра ЛХП.

23. Які сигнатури спектрів ЛХП можливі в фазових просторах розмірності два та три.

24. Як довести неможливість існування хаотичних атракторів на площині.

25. Який основний практичний критерій ідентифікації дивних атракторів.

26. У чому полягає основна ідея методу Бенеттіна та ін.

27. Коли проводиться перенормування в методі Бенеттіна та ін.

28. В чому полягає узагальнення методу Бенеттіна та ін. для обчислення повного спектру ЛХП.

29. Що таке січна Пуанкаре фазової траєкторії.

30. Що таке переріз та відображення Пуанкаре.

30. У чому полягає основна ідея методу Ено.

30. Як можливо ідентифікувати тип атрактора за його перерізом Пуанкаре.

31. У чому полягає суть гіпотези Каплана–Йорка.

32. Що таке ляпуновська розмірність атрактора.

33. Для яких динамічних систем формула Каплана–Йорка визначає фрактальну розмірність.

34. Чому дорівнюють фрактальні розмірності різних можливих типів атракторів у тривимірному просторі.

35. Як на практиці знаходять ентропію Колмогорова–Сіная.

36. Чим відрізняється детермінований хаос від стаціонарного випадкового процесу.

37. Що таке амплітудний спектр функції.

38. Який спектр називається гармонічним.

39. У чому полягає різниця між дискретним та неперервним спектром.

40. Як визначається Фур'є–спектр.

41. Як будуються Фур'є–спектри для різних типів атракторів динамічних систем.

42. Як ідентифікується тип атрактора за Фур'є–спектром.

43. Як визначається природна інваріантна міра атрактора.

44. У чому полягає суть комп'ютерного алгоритму побудови природної інваріантної міри атрактора.

Розділ 2

Хаос у маятникових системах з обмеженим збудженням

2. 1. Вступ

Різноманітні маятникові системи постійно привертають до себе увагу дослідників у різних областях математики, механіки й фізики. Ці системи є класичним прикладом коливальних динамічних систем. У маятникових системах уперше були виявлені такі фундаментальні ефекти як параметричний резонанс, високочастотна стабілізація нестійких положень рівноваги і багато інших. Ці системи були своєрідним полігоном, на якому проходили прикладну перевірку абстрактні теоретичні результати, отримані в якісній теорії динамічних систем.

Маятникові системи надзвичайно прості по своїй фізичній природі й легко дозволяють проводити експериментальну перевірку різних, теоретично виявлених, коливальних ефектів. Однак, у більшій ступені, інтерес до дослідження різних аспектів динамічної поведінки маятникових систем пояснюється тим, що багато ефектів і явищ, уперше виявлені в маятникових системах, згодом були встановлені й для систем значно більш складної фізичної природи таких як кільця, оболонки, пластини, різні середовища в циліндричних і сферичних порожнинах. Більше того, різні маятникові системи стали з успіхом застосовуватися для наближеного математичного моделювання динаміки, перахованих вище, складних коливальних систем. При цьому спрощуються, іноді досить суттєво, одержувані диференціальні рівняння руху, але залишається досить точним опис динаміки цих складних коливальних систем.

Останнім часом значно розширилася область застосування маятникових моделей для математичного опису коливальних процесів. Такі моделі стали широко застосовуватися при дослідженні динамічної поведінки систем найрізноманітнішої природи в біології, медицині, економіці й соціології.

Переважна більшість досліджень динаміки маятникових систем проводиться без обліку обмеженості потужності джерела збудження коливань. При такій ідеалізації джерела збудження передбачається, що воно має необмежену потужність. Тому, при математичному моделюванні таких систем, зворотний вплив коливальної системи на функціонування джерела збудження коливань виключають із розгляду, вважаючи цей вплив нескінченно малим. Такий підхід і широке використання різних методів редукції дозволяє знизити порядок динамічних систем застосованих для дослідження коливань маятників. Однак, у багатьох випадках, така ідеалізація приводить до значних помилок в якісному й кількісному описі динамічних режимів маятникових систем [3]. Так стійкі за Ляпуновим, при теоретичних розрахунках, режими можуть виявитися нестійкими при проведенні натурних експериментів. Замість очікуваних періодичних режимів в експерименті виявляються положення рівноваги, і навпаки.

Світоглядний переворот, яким з'явилося відкриття детермінованого хаосу в динамічних системах суттєво розширив наші представлення про можливі усталені режими коливань маятникових систем. В багатьох випадках очевидною стала порочність ідеалізації джерел збудження й, особливо, застосування різних методів редукції. Якісно різні методи редукції призводять до заміни досліджень динаміки довільної вихідної системи дослідженням динаміки ряду підсистем, на які якимось чином розщеплюється вихідна система. При цьому зменшується розмірність фазових просторів одержуваних підсистем. Платою за таке спрощення вихідної системи може служити повна втрата інформації про реально існуючі хаотичні атрактори вихідної системи.

Фактично своєрідним редукуванням вихідної маятникової системи є нехтування взаємодією між цією системою й джерелом збудження її коливань. При цьому неважливо, на якій підставі, чи то на підставі необмеженості потужності джерела збудження, чи то на підставі малості коефіцієнтів взаємозв'язків між маятником і джерелом збудження. Нехтування взаємозв'язками між маятником і джерелом може призвести до повної втрати інформації про реально існуючі хаотичні режими взаємодії. Тому відкриття детермінованого хаосу змушує відмовитися від застосування методів редукції при повноцінному дослідженні усталених динамічних режимів коливальних систем.

2. 2. Плоский фізичний маятник

2. 2. 1. Рівняння руху й стійкість положень рівноваги

Найбільш простим прикладом маятникової системи є плоский фізичний маятник, точка підвісу якого збуджується електродвигуном обмеженої потужності. Розглянемо таку систему, схема якої представлена на рис. 2.1

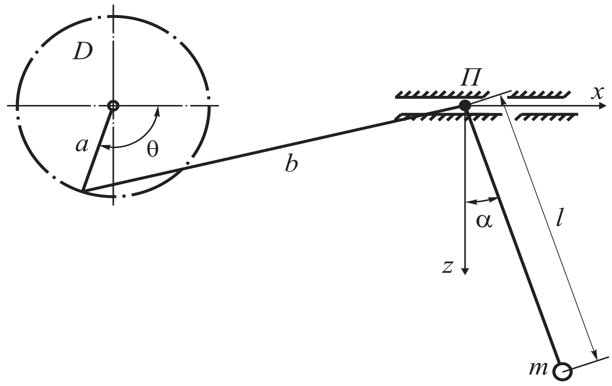


Рис. 2.1: Схема розглянутої системи.

Кривошипно–шатунний механізм через шатун b з'єднаний з підвісом фізичного маятника. Коли кривошип a переміщається на кут Θ повзун разом з підвісом одержує переміщення виду $u(t) = a[\cos\Theta + 0.25a_1(1 + \cos 2\Theta)]$, де $a_1 = \dfrac{a}{b}$. Для опису коливань маятника використовуємо декартову систему координат Oxz. Тоді кінетична енергія всієї системи має вигляд [5]

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{u}+\dot{x})^2 + \dot{z}^2], \tag{2.1}$$

а потенційна

$$V = mg(l - z), \tag{2.2}$$

де I– момент інерції ротора електродвигуна; m– маса маятника; l– приведена довжина маятника. Позначимо через α кут відхилення маятника від осі z, тоді $x = l\sin\alpha, z = l\cos\alpha$. Припустимо, що $\dfrac{a}{b} \ll 1$. Розкладаючи, для малих кутів α, функції (2.1–2.2) у ряд Тейлора одержимо :

$$\begin{aligned} &T \simeq \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\left[\frac{a^2}{l^2}\dot{\Theta}^2\sin^2\Theta - 2\frac{a}{l}\dot{\alpha}\dot{\Theta}\sin\Theta + \frac{a}{l}\dot{\alpha}\alpha^2\dot{\Theta}\sin\Theta + \dot{\alpha}^2\right];\\ &V \simeq mgl\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{24}\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Далі, використовуючи розклад(2.3), одержимо наступні рівняння руху вихідної системи (рівняння Лагранжа) [5]:

$$\begin{gathered} I\ddot{\Theta} = L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) + mla[\ddot{\alpha} - \frac{1}{2}(\ddot{\alpha}\alpha^2 + 2\dot{\alpha}^2\alpha) - \\ -\frac{a}{l}(\ddot{\Theta}\sin\Theta + \dot{\Theta}^2\cos\Theta)]\sin\Theta, \\ \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha + \delta\dot{\alpha} - \frac{\omega_0^2}{6}\alpha^3 + \frac{a}{l}\frac{\alpha^2}{2}(\ddot{\Theta}\sin\Theta + \dot{\Theta}^2\cos\Theta) = \\ = \frac{a}{l}(\ddot{\Theta}\sin\Theta + \dot{\Theta}^2\cos\Theta). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Тут $L(\dot{\Theta})$– рушійний момент двигуна; $H(\dot{\Theta})$– внутрішній момент сил опору обертанню ротора двигуна; $\omega_0 = (\dfrac{g}{l})^{\frac{1}{2}}$ – власна частота маятника; δ– коефіцієнт демпфірування сили опору середовища, у якім рухається маятник.

Нелінійна система рівнянь (2.4) є детермінованою й описує процес збудження коливань маятника електродвигуном. Введемо малий параметр $\varepsilon = \dfrac{a}{l}$, тобто припустимо, що довжина кривошипа a набагато менше довжини l. Крім того, припустимо, що реалізуються умови резонансної взаємодії електродвигуна й маятника, коли швидкість $\dot{\Theta}$ близька до власної частоти маятника ω_0:

$$\dot{\Theta}(t) = \omega_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\omega_0\nu. \tag{2.5}$$

Нелінійні коливання маятника будемо відшукувати у вигляді:

$$\alpha(t) = \varepsilon^{1/3}[y_1(\tau)\cos\Theta(t) + y_2(\tau)\sin\Theta(t)],$$

де $\tau = \dfrac{\varepsilon^{2/3}\Theta(t)}{2}$ – повільний час.

Після проведення процедури усереднення за швидким часом $\Theta(t)$ і використання додаткового співвідношення

$$\dot{\alpha}(t) = \varepsilon^{1/3}\dot{\Theta}[-y_1(\tau)\sin\Theta + y_2(\tau)\cos\Theta]$$

для нових змінних $y_1(\tau)$ і $y_2(\tau)$ одержимо наступну систему рівнянь:

$$\frac{dy_1(\tau)}{dt} = -\frac{\varepsilon^{2/3}}{\dot{\Theta}}\left[\frac{\eta}{2}y_1\omega_0\dot{\Theta} + \frac{\nu}{2}\omega_0^2 y_2 + \frac{\omega_0^2}{16}(y_1^2 y_2 + y_2^2)\right] + \varepsilon^{4/3}\{\ldots\};$$

$$\frac{dy_2(\tau)}{dt} = \frac{\varepsilon^{2/3}}{\dot{\Theta}}\left[-\frac{\eta}{2}y_2\omega_0\dot{\Theta} + \frac{1}{2}\dot{\Theta} + \frac{\nu}{2}\omega_0^2 y_1 + \frac{\omega_0^2}{16}(y_1^3 + y_1 y_2^2)\right] + \varepsilon^{4/3}\{\ldots\},$$

де $\eta = \delta\varepsilon^{-2/3}\omega_0^{-1}$. Переходячи до похідних по повільному часу, одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= -\eta y_1 - \nu y_2 - \frac{1}{8}(y_1^2 y_2 + y_2^3); \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= -\eta y_2 + \nu y_1 + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1 y_2^2) + 1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Для розгляду усталених режимів взаємодії між маятником і електродвигуном у якості $L(\dot{\Theta})$ використовуємо статичну характеристику двигуна, причому припускаємо, що $\dfrac{L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta})}{I} = \dfrac{2\varepsilon^{2/3}}{\omega_0}M(\dot{\Theta})$. Для опису обертання вала двигуна введемо нову змінну $\dot{\Theta}(t) = \Omega(\tau)$, яка задовольняє згідно (2.4) наступному усередненому за швидким часом рівнянню:

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = M(\Omega) - \mu y_2 + \varepsilon^{2/3}\{\ldots\}, \tag{2.7}$$

де

$$\mu = \frac{ma^{2/3}l^{4/3}\omega_0}{I}. \tag{2.8}$$

Апроксимуємо статичну характеристику двигуна лінійною функцією $M(\Omega) = N_0 + E\Omega$, де N_0 і E — постійні, причому $E < 0$.

Таке представлення статичної характеристики описує її спадаючу частину, а параметр E визначає кут нахилу цієї частини до осі абсцис. На підставі прийнятої апроксимації й співвідношення (2.5), рівняння (2.7) перетворимо в рівняння відносно розлагодження частот $\nu(\tau)$

$$\frac{d\nu}{d\tau} = F + E\nu + Dy_2. \tag{2.9}$$

Тут

$$D = -\frac{2ml^2}{I}; F = \frac{2l^{2/3}}{a^{2/3}}(\frac{N_0}{\omega_0} + E). \tag{2.10}$$

Для зручності ще приймемо позначення $\nu = y_3, \eta = -C$. Відмітимо, що $C \leq 0$, тому що $\varepsilon > 0$, $\omega_0 > 0$, а $\delta \geq 0$. Таким чином, процес взаємодії коливань маятника й обертання вала двигуна описується системою трьох нелінійних рівнянь [5]:

$$\begin{gathered} \frac{dy_1}{d\tau} = Cy_1 - y_2y_3 - \frac{1}{8}(y_1^2y_2 + y_2^3), \\ \frac{dy_2}{d\tau} = Cy_2 + y_1y_3 + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1y_2^2) + 1, \\ \frac{dy_3}{d\tau} = Dy_2 + Ey_3 + F. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Система рівнянь (2.11) явно містить чотири керуючих параметра (C, D, E, F), при зміні яких у ній реалізується той або інший динамічний режим. Відмітимо, що один із цих параметрів (E) безпосередньо задається кутом нахилу характеристики двигуна, другий (C) – пропорційний опору середовища, а інші два визначаються за формулами (2.10). Як видно з цих формул, параметри D, F залежать від довжини й маси маятника, його власної частоти, коефіцієнта демпфірування, лінійних розмірів кривошипно–шатунного механізму, моменту інерції ротора й також від параметрів статичної характеристики електродвигуна. Тобто, фактично дані параметри є мультипараметрами динамічної системи (2.11).

Позначимо через Vf векторне поле, породжуване правою частиною системи (2.11). Тоді дивергенція цієї системи може бути визначена по формулі

$$div\, Vf = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial y_3} = 2C + E. \tag{2.12}$$

Отже, дивергенція системи постійна й від'ємна, тому що $C < 0$ і $E < 0$. Таким чином система (2.11) є дисипативною, внаслідок чого всі атрактори цієї системи, як регулярні, так і хаотичні є підмножинами нульового фазового об'єму розташованими в обмеженій області фазового простору.

Дослідження системи (2.11) почнемо з одержання умов асимптотичної стійкості її положень рівноваги. Усі положення рівноваги системи (2.11) є розв'язками наступної системи рівнянь

$$\begin{gathered} Cy_1 - y_2y_3 - \frac{1}{8}(y_1^2y_2 + y_2^3) = 0, \\ Cy_2 + y_1y_3 + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1y_2^2) + 1 = 0, \\ Dy_2 + Ey_3 + F = 0. \end{gathered} \tag{2.13}$$

У загальному випадку ці розв'язки можуть бути знайдені тільки чисельно.

Припустимо, що $y_1 = y_{10}$, $y_2 = y_{20}$, $y_3 = y_{30}$ один з розв'язків системи (2.13). Тоді відповідна система рівнянь у варіаціях має вигляд

$$\begin{gathered} \dot{\tilde{y}}_1 = (C - \frac{1}{4}y_{10}y_{20})\tilde{y}_1 - (\frac{3}{8}y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{10}^2)\tilde{y}_2 - y_{20}\tilde{y}_3, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = (\frac{3}{8}y_{10}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{20}^2)\tilde{y}_1 + (C + \frac{1}{4}y_{10}y_{20})\tilde{y}_2 + y_{10}\tilde{y}_3, \\ \dot{\tilde{y}}_3 = D\tilde{y}_2 + E\tilde{y}_3. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Для зручності покладемо

$$\begin{gathered} a_{11} = C - \frac{1}{4}y_{10}y_{20}; \;\; a_{12} = -\frac{3}{8}y_{20}^2 - y_{30} - \frac{1}{8}y_{10}^2; \\ a_{21} = \frac{3}{8}y_{10}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{20}^2; \;\; a_{22} = C + \frac{1}{4}y_{10}y_{20}. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Очевидно, що характеристичне рівняння системи (2.14) може бути записане у вигляді:

$$k^3 + A_1k^2 + A_2k + A_3 = 0,$$

де позначено

$$A_1 = -2C - E; \;\; A_2 = a_{11}a_{22} + 2C + E - Dy_{10} - a_{12}a_{21};$$

$$A_3 = (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})E + (a_{11}y_{10} + a_{12}y_{20})D.$$

Застосовуючи критерій А.Гурвіца одержимо наступні достатні умови асимптотичної стійкості положень рівноваги системи (2.11):

$$2C + E < 0, \;\; A_2 > 0, \;\; A_3 > 0, \;\; (2C + E)A_2 + A_3 < 0 \qquad (2.16)$$

Відмітимо, що перша з умов стійкості (2.16) завжди виконується в силу дисипативності системи (2.11).

Отримані умови дуже громіздкі, однак вони дозволяють, створюючи відповідні комп'ютерні програми, простежити вплив параметрів системи (2.11) на стійкість положень рівноваги. Так як нашою основною метою є виявлення усталених хаотичних режимів системи (2.11), ми не зупиняємося тут на детальному вивченні стійкості положень рівноваги.

2. 2. 2. Дослідження хаотичних режимів

Перейдемо до дослідження усталених розв'язків системи рівнянь (2.11). Ця система є повністю детермінованою нелінійною системою диференціальних рівнянь з тривимірним фазовим простором. Тому існує теоретична можливість виникнення в системі (2.11) хаотичних атракторів [1, 2, 4, 5, 6]. Вивчимо вплив параметрів цієї системи на виникнення, розвиток і зникнення в ній детермінованого хаосу. При цьому при доказі існування хаотичних режимів у системи (2.11) застосуємо комплексний підхід. Він буде полягати в тому, що для підтвердження факту хаотичності (регулярності) того або іншого атрактора системи ми детально вивчимо цілий ряд кількісних і якісних характеристик атрактора, а не обмежимося однією, двома характеристиками. Ми будемо докладно аналізувати такі характеристики атракторів системи (2.11) як фазові портрети, перерізи й відображення Пуанкаре, розподіли природної інваріантної міри й спектральної густини та спектри ляпуновських характеристичних показників (ЛХП).

Так як дана система є нелінійною, то для побудови її розв'язків доводиться використовувати чисельні методи. Зупинимося на методиці застосування різних чисельних методів і алгоритмів для побудови різноманітних характеристик системи (2.11). Для побудови фазових портретів системи застосовується метод Рунге–Кутти четвертого або п'ятого порядку зі змінним кроком чисельного інтегрування, причому для розрахунків довжини змінного кроку використовується коригувальна процедура Дормана–Принса [8]. Такий метод дозволяє забезпечити досить високу точність проведених обчислень. Так локальна погрішність цього методу може досягати величин порядку $O(10^{-12})$–$O(10^{-15})$.

Для побудови перерізів і відображень Пуанкаре використовується метод Ено [5]. Розрахунки спектра ЛХП проводяться за допомогою алгоритму Бенеттіна й ін. [5, 6]. При побудові розподілів спектральної густини (Фур'є–спектрів) використовуються методи Сімпсона та Файлона. Нарешті, при одержанні розподілів природних інваріантних мір застосовується комп'ютерна техніка кодування відтінками чорного кольору [6].

При проведенні чисельних розрахунків покладалося, що параметри системи рівні: $C = -0.1$, $D = -0.5$, а вихідні початкові умови мають вигляд

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0.$$

Відмітимо, що з метою виключення впливу нетипових фазових траєкторій при розрахунках проводилася варіація вихідних початкових умов у деякому околі нуля, хоча детальна побудова басейнів притягання атракторів системи, при цьому, не проводилося. Параметри E, F розглядалися як бифуркаційні й були змінними при розрахунках.

Спочатку припустимо, що $E = -0.61$, а F змінюється на сегменті $-0.31 \leq F \leq 0.28$. На рис. 2.2а–б наведені залежності старшого, відмінного від нуля, ляпуновського характеристичного показника системи (2.11) від значень пара-

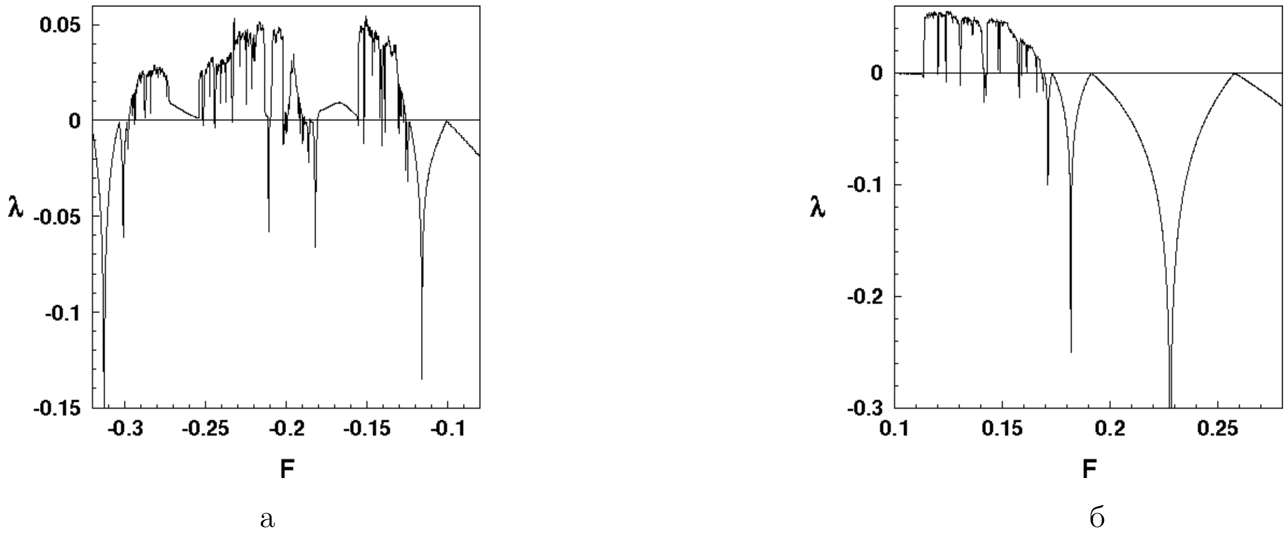


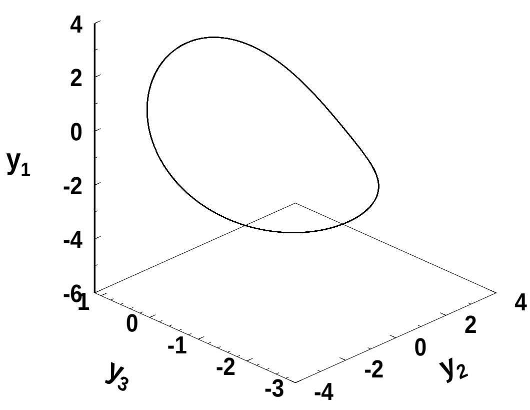
Рис. 2.2: Залежність старшого ляпуновського характеристичного показника від *F (а)–(б)*

метра F. Як відомо, наявність у спектрі ЛХП додатного показника є основним практичним критерієм існування в системи хаотичного атрактора. Як видно з рис. 2.2а–б існує кілька інтервалів зміни F, у яких система (2.11) має додатний ляпуновський показник. Отже, у цих інтервалах у даної системи існують хаотичні атрактори.

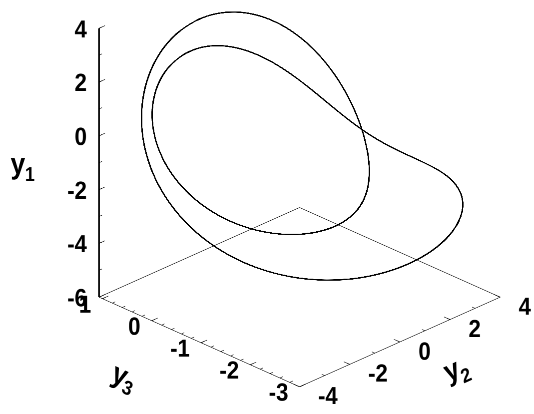
Розглянемо якісні зміни типів усталених режимів коливань більш детально. При $F = 0.28$ у системі (2.11) існує граничний цикл, досить простої, 1–тактової структури. При $F = 0.2576$ даний цикл втрачає стійкість і в системі відбувається перша біфуркація подвоєння періоду. У результаті цієї біфуркації виникає стійкий 2–тактний граничний цикл, період якого у два рази більше періоду попереднього циклу. Потім, при $F = 0.1912$ у системі відбувається друга біфуркація подвоєння періоду, в результаті якої втрачає стійкість 2–тактний граничний цикл і виникає стійкий 4–тактний граничний цикл, чий період у два разу більше періоду попереднього циклу. Третя й четверта біфуркації подвоєння періоду відбуваються, відповідно, при $F = 0.173$ і $F = 0.1692$, у результаті чого виникають 8 і 16–тактні цикли. Цей нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду призводить до виникнення в системі хаотичного атрактора при $F = 0.1674$. На рис. 2.3 показаний вихідний граничний цикл і три перші біфуркації подвоєння періоду, а на рис. 2.4 четверта біфуркація подвоєння й хаотичний атрактор. Виниклий хаотичний атрактор має спіральну структуру.

На наведених рисунках чітко видні подвоєння тактности граничних циклів. Відзначимо, що фазові портрети граничних циклів, відповідних більшим, за порядковим номером, біфуркаціям подвоєння, і хаотичного атрактора зовні будуть дуже схожими один на одного. Однак між ними є цілий ряд істотних відмінностей, одна з яких полягає в наступному. Зображуюча точка траєкторії циклу завжди вертається в будь-який, як завгодно малий окіл, циклу через час строго рівний періоду циклу. Для хаотичного атрактора повертаємість зображуючої точки траєкторії в будь-який малий окіл атрактора завжди має місце в силу стійкості за Пуассоном, однак тривалість інтервалів часу такого повернення – непередбачувана. Моменти часу, у які відбуваються такі повернення, утворюють деяку хаотичну послідовність. У хаотичного атрактора зображуюча точка належної йому траєкторії здійснює хаотичні блукання вздовж нескінченного числа витків спіралі атрактора з непередбачуваними порушеннями порядку попадання в малий окіл того або іншого витка.

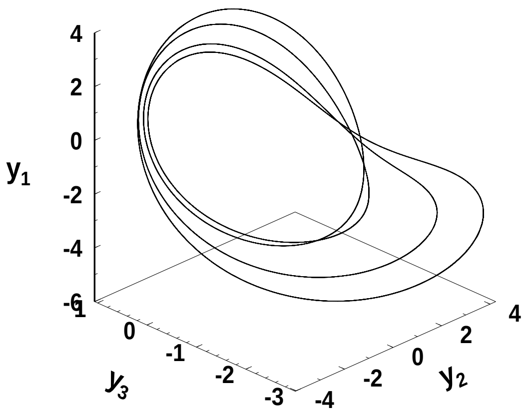
Зупинимося на аналізі перерізів Пуанкаре знайдених атракторів системи (2.11). На рис. 2.5 наведені, побудовані за допомогою методу Ено, перерізи Пуанкаре площиною $y_3 = 0$ перших трьох біфуркацій подвоєння граничного циклу й самого хаотичного атрактора. Як видно з рис. 2.5, дані перерізи циклів складаються з скінченого числа точок. А саме, однієї точки (для 1–тактного циклу), двох точок (для 2–тактного циклу) і чотирьох точок (для 4–тактного циклу). Ці точки повторюються через час строго рівний періоду відповідного циклу. На відміну від регулярних атракторів переріз Пуанкаре хаотичного атрактора (рис. 2.5.г) має більш складну структуру. Він являє собою деяку хаотичну точкову множину, число точок якої увесь час зростає з зростанням часу чисельного інтегрування. Ці точки, у силу теореми існування та єдиності, ніколи не збігаються одна з одною. Ця хаотична точко-



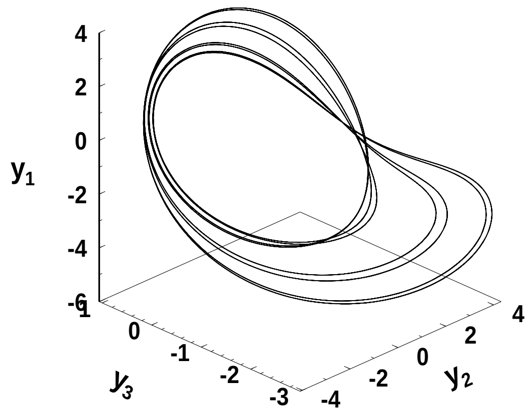
а



б



в



г

Рис. 2.3: Граничний цикл і перші три біфуркації подвоєння періоду при $F = 0.258$ *(а)*, $F = 0.192$*(б)*, $F = 0.174$*(в)* і $F = 0.171$*(г)*.

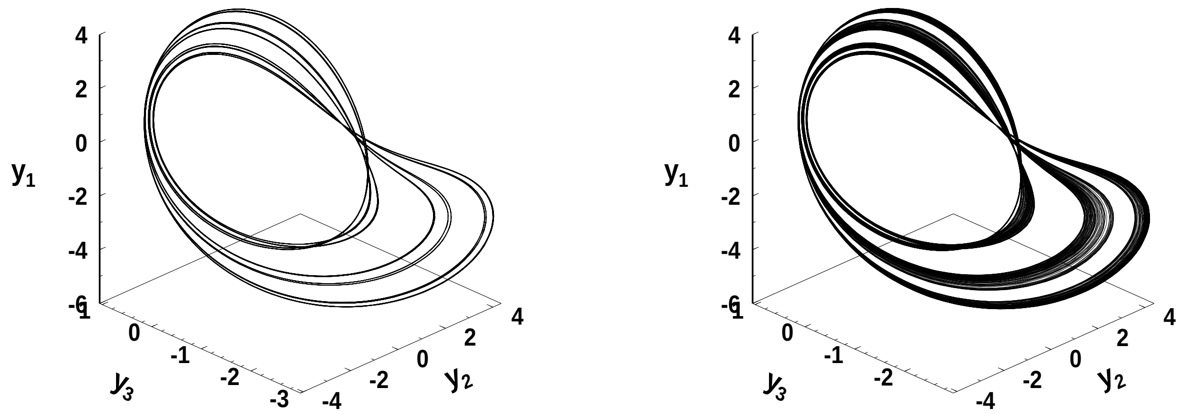


Рис. 2.4: Четверта біфуркація граничного циклу при $F = 0.169$ *(а)* й хаотичний атрактор при $F = 0.1665$*(б)*.

ва множина локалізується уздовж декількох областей близьких за формою до ліній. Такий вид перерізу Пуанкаре називають "квазістрічковим"[1]. Відмітимо, що передбачити порядок розміщення точок уздовж "стрічок", що утворюють переріз неможливо, однак наперед відомо, що розташовуватися вони можуть тільки уздовж цих стрічок. Таким чином, головна відмінність у перерізах Пуанкаре регулярних і хаотичних атракторів полягає в тому, що вони "скінчені й передбачувані" для регулярних атракторів і "нескінченні й непередбачувані" для хаотичних атракторів.

Таким чином, при зменшенні параметра F, перехід від регулярного режиму до хаотичного відбувається за сценарієм Фейгенбаума [1, 2, 6], тобто через нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду граничних циклів. Доказом реалізації вищезгаданого сценарію послуговує також і рис. 2.2б. Так при розгляді правої частини рис. 2.2б добре видні точки підходу графіка до осі абсцис з від'ємної області значень λ. Ці точки підходу до осі абсцис і відпо-

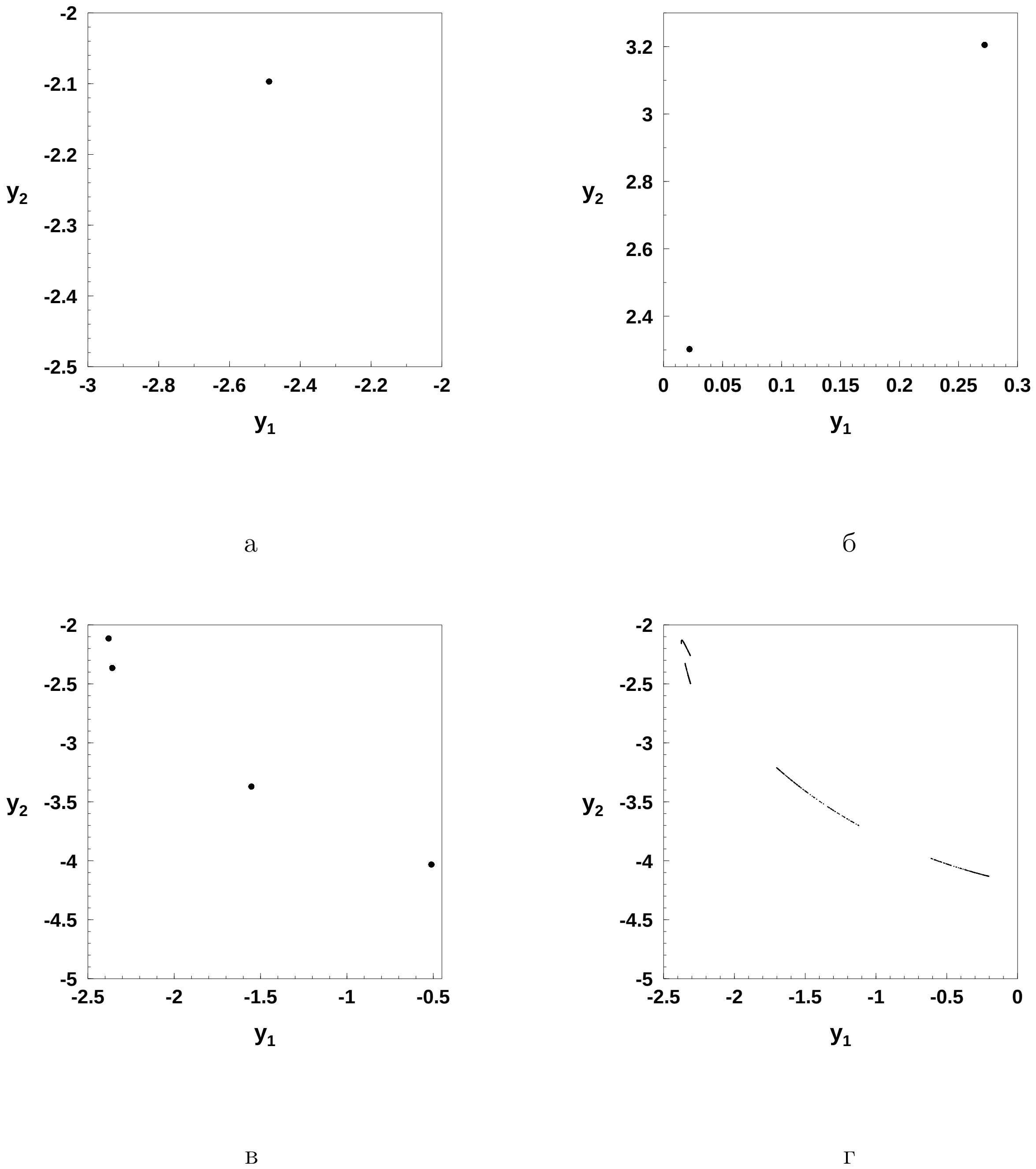


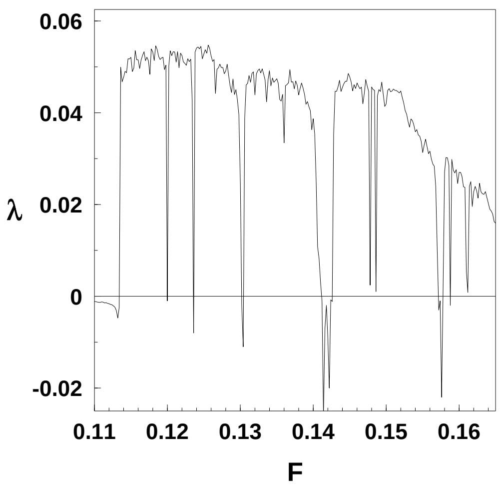
Рис. 2.5: Перерізи Пуанкаре площиною $y_3 = 0$ граничних циклів при $F = 0.258$ *(а)*, $F = 0.192$*(б)*, $F = 0.171$*(в)* і хаотичного атрактора при $F = 0.1665$*(г)*.

відають послідовним біфуркаціям подвоєння періоду. При побудові фрагмента графіка, відповідного інтервалу каскаду біфуркацій подвоєння в більшому масштабі, вдається з високою точністю визначити чисельні значення точок біфуркацій і граничне значення параметра, при якому виникає хаотичний атрактор.

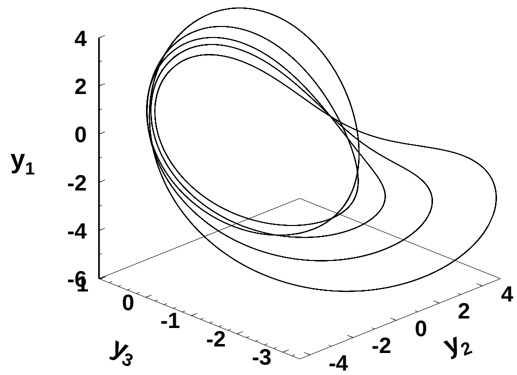
Для системи (2.11) притаманний ще один з сценаріїв переходу до хаосу, а саме через переміжність за Помо–Манневіллем. Розглянемо такий перехід до хаосу більш детально. Уважне вивчення рис. 2.2б дозволяє виявити ще одну цікаву закономірність у поведінці системи (2.11) в інтервалі зміни параметра $F \in (0.114, 0.167)$, в якому у неї існують хаотичні атрактори. З цією метою на рис. 2.6а наведений збільшений фрагмент рис. 2.2б. На рисунку добре видні дуже вузькі інтервали, на яких спостерігаються провали графіка залежності ляпуновського характеристичного показника в область від'ємних значень. Ці провали відповідають інтервалам зміни F, в яких хаотичний атрактор зникає, і в системі (2.11) виникає регулярний усталений режим у вигляді стійкого граничного циклу. Такі невеликі інтервали періодичних режимів в хаотичних областях зміни параметра називаються вікнами періодичності.

На рис. 2.6б наведений фазовий портрет такого циклу з вікна періодичності при $F = 0.1425$. Цікаво, що побудований цикл є 5-тактним. Відповідно, його переріз Пуанкаре складається з п'яти точок. Цикли з такою тактністю ще не зустрічалися при вивченні системи (2.11). При "виході" із цього вікна періодичності через його праву границю, тобто при збільшенні F виникає хаотичний атрактор.

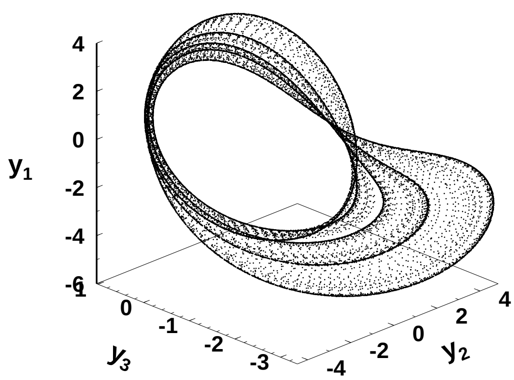
На рис. 2.6в наведений розподіл природної інваріантної міри по фазовому портрету хаотичного атрактора побудований при $F = 0.14275$. Цей розподіл характеризує ймовірність знаходження зображуючої точки траєкторії хаотичного атрактора в заданій області фазового простору. Даний розподіл побудований в комп'ютерній техніці кодування відтінками чорного кольору [5, 6]. Досліджувана система інтегрується чисельно, а при виведенні результатів інтегрування на екран комп'ютера застосовується наступний прийом.



а



б



в

Рис. 2.6: Збільшений фрагмент залежності ляпуновського характеристичного показника *(а)*; граничний цикл у вікні періодичності в хаосі при $F = 0.1425$*(б)*; розподіл природної інваріантної міри по фазовому портрету хаотичного атрактора при $F = 0.14275$*(в)*.

При попаданні зображуючої точки атрактора в деякий піксель екрана цьому пікселю присвоюється певний колірний код і числовий код одиниця. Якщо, при подальшому чисельному інтегруванні зображуюча точка знову попадає в цей же піксель числовий код збільшується на одиницю. Відмітимо, що попадання точок в той самий піксель зовсім не означає збіг їх координат, а лише свідчить, що їх координати як завгодно близькі одна з іншою. Тобто, різні фазові точки хаотичного атрактора не збігаються одна з іншою, що неможливо в силу теореми існування і єдиності, а лише так близькі між собою, що їх близькість перевершує роздільну здатність екрана комп'ютера. Далі при повторних попаданнях точки в певний піксель екрана числовий код щораз збільшується на одиницю. Чим більше числовий код, тем з більшою яскравістю точка висвітлюється на екрані. Таким чином, ті частини хаотичного атрактора, де траєкторія перебуває більшу частину часу, яскравіше зображуються на екрані комп'ютера. Зрозуміло, такий же ефект буде спостерігатися й при роздруківці результатів чисельного інтегрування на принтері. Одержувані зображення приймають за наближене представлення розподілу природної інваріантної міри по фазовому портрету атрактора.

Побудований на рис.2.6в розподіл інваріантної міри прояснює механізм переходу від граничного цикла до хаотичного атрактора. Коли ми наближаємося зліва до точки біфуркації, яка відбувається при $F \approx 0.1427$, до існуючого в системі стійкого граничного циклу, типу зображеного на рис. 2.6б, починає наближатися нестійкий. У точці біфуркації вони зливаються й зникають. При подальшому, як завгодно малому, збільшенні F відбувається, так звана, дотична біфуркація. У системи (2.11) взагалі не залишається стійких усталених режимів у цій частині фазового простору. Тому, близькі траєкторії починають розбігатися й залишати область, у якій перебував стійкий граничний цикл. В цій області взагалі не існує ніяких інших атракторів системи. Але, так як нелінійна система (2.11) є стійкою за Лагранжем та Пуассоном і не має стійких граничних множин, в околі зниклого граничного циклу, відбувається процес реінжекції траєкторій, у результаті якого вони знову повертаються в область зниклого циклу. Цей процес, нескінченно повторюючись, призводить до утворення складної, нестійкої за Ляпуновим (але стійкої за Лагранжем та за Пуассоном) граничної множини – хаотичного атрактора типу наведеного на рис. 2.6в. Рух траєкторій даного хаотичного атрактора можна розбити на дві стадії (фази: ламінарну, якій відповідають близькі до періодичних рухи траєкторій у малому околі зниклого граничного циклу, і турбулентну, якій відповідають відходи траєкторій у більш далекі області фазового простору. Таким чином, рух траєкторій на виниклому атракторі складається із двох "переміжних" фаз. Причому, моменти часу переходу від ламінарної фази до турбулентної непередбачені. Вони утворюють хаотичну часову послідовність. Такий перехід від регулярного режиму до хаотичного Помо й Манневилль назвали переміжністю першого типу.

Як добре видно з рис. 2.6в більш темні його ділянки майже повторюють контури граничного циклу з рис. 2.6б. Такі, більш темні, ділянки з рис. 2.6в відповідають ламінарним фазам руху траєкторій по атрактору. Більш світлі ділянки відповідають турбулентним сплескам траєкторій, які тут відбуваються в середину області локалізації атрактора в фазовому просторі. Даний рисунок також свідчить про те, що тривалість ламінарних фаз перевищує тривалість турбулентних, що добре узгоджується з відомими теоретичними представленнями хаотичної динаміки.

2. 2. 3. Карта динамічних режимів

Дуже повне й наочне представлення про поведінку динамічної системи надає карта динамічних режимів – діаграма на площині, де по осях координат відкладено два параметри й показані границі областей різних динамічних режимів. Так як в досліджуваної системи (2.11) число параметрів більше двох, то докладна карта динамічних режимів складається з багатьох листів.

Зупинимося на методиці побудови карти динамічних режимів. Площина будь-яких обраних параметрів системи розбивається, за допомогою вертикально – горизонтальної сітки, на близько віддалені одна від іншої точки . У кожній сітковій точці чисельно інтегрується система рівнянь (2.11) і визначається старший ляпуновський характеристичний показник. Основна діагностика усталеного режиму системи у деякій сітковій точці площини параметрів E, F, проводиться за знаком старшого ляпуновського характеристичного показника. Якщо старший ляпуновський показник додатний, то усталений режим системи є хаотичним, а якщо відповідний показник від'ємний, то усталений режим є положенням рівноваги. Якщо ж старший ляпуновський характеристичний показник у сітковій точці дорівнює нулю, то усталений режим системи може бути або періодичним, або квазіперіодичним. Для уточнення типу усталеного режиму аналізується другий показник у спектрі ЛХП. Якщо другий показник від'ємний, то усталений режим є періодичним, а якщо цей показник нульовий, то усталений режим – квазіперіодичний. Особливо ретельно необхідно аналізувати ситуації при яких ляпуновські показники, по абсолютній величині, порівнянні з похибкою методу чисельного інтегрування (це відповідає випадку, коли ми перебуваємо досить близько до границь областей динамічних режимів різних типів). У таких випадках, для точної ідентифікації типу усталеного режиму додатково проводиться вивчення фазових портретів, перерізів і відображень Пуанкаре, а також Фур'є–спектрів. Після встановлення типу динамічного режиму в якій-небудь сітковій точці пікселю екрана комп'ютера, відповідному до даної точки площини параметрів E, F присвоюється певний колірний код. На екрані комп'ютера виходить деяка колірна мозаїка, що дає наочне представлення про розташування динамічних режимів різних типів на площині параметрів системи (2.11).

Приведемо один з листів даної карти [5], побудованої для параметрів E (крутизни статичної характеристики електродвигуна) і F, який крім параметрів статичної характеристики двигуна також залежить від довжини маятника й кривошипа. Фактично одержана двопараметрична карта динамічних режимів є мультипараметричною. Вона може бути перетворена в карти, що показують залежність динамічних режимів системи (2.11) від змін E (кру-

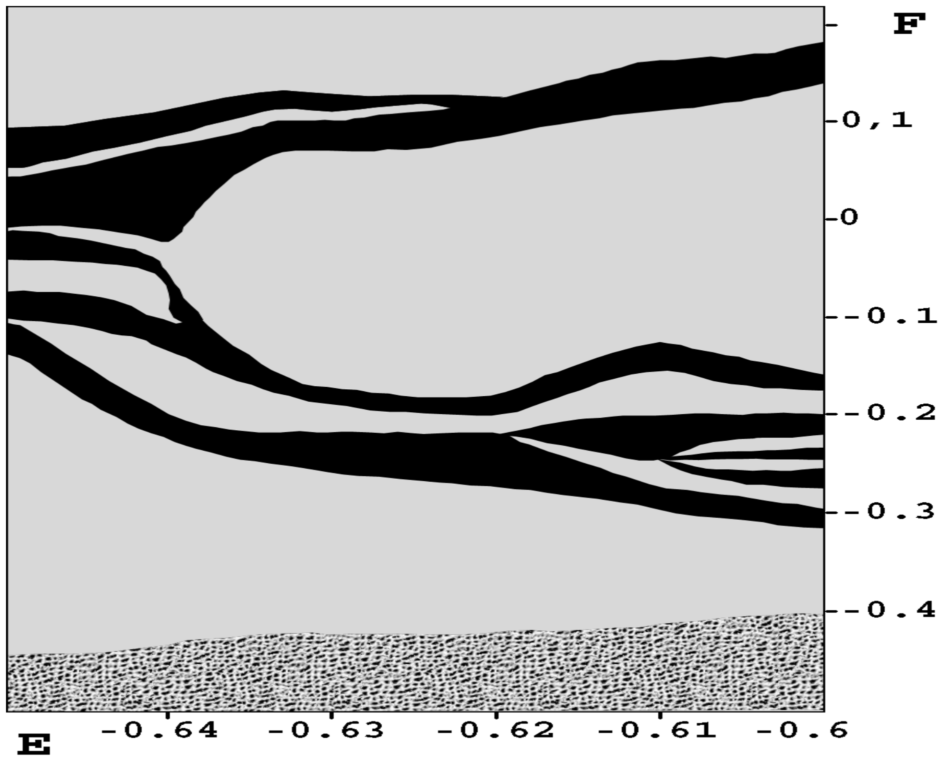


Рис. 2.7: Карта динамічних режимів.

тизни статичної характеристики електродвигуна) і, відповідно, a (довжини кривошипа), l (приведеної довжини маятника), ω_0 (власної частоти маятника). При проведенні розрахунків по побудові карти динамічних режимів покладалося, що $C = -0.1$, $D = -0,5$. На рис. 2.7 наведений, отриманий в результаті аналізу й обробки результатів чисельних розрахунків, один з листів карти динамічних режимів системи "маятник-електродвигун". Сірі області карти відповідають періодичним динамічним режимам, чорні - хаотичним, а зернисті -положенням рівноваги системи. Як видно з рис. 2.7 хаотичні режими на карті представляються у вигляді деякої "ріки", численні рукава якої, "протікають" через області періодичних режимів. Положення рівноваги системи (2.11) спостерігаються в області розташованої у нижнього краю карти.

Зупинимося ще на одній важливій характеристиці раніш досліджених хаотичних атракторів – фрактальній розмірності. Як відомо, усі хаотичні атрактори є фрактальними множинами й мають дробову розмірність Хаусдорфа–

Безіковича (фрактальну розмірність). На відміну від хаотичних, розмірність Хаусдорфа–Безіковича для регулярних атракторів буде цілою. У загальному випадку багатовимірної динамічної системи дуже важко обчислити фрактальну розмірність нерегулярного атрактора. Але, так як ми розглядаємо динамічну систему розмірність фазового простору якої дорівнює трьом, то для систем з такою розмірністю фазового простору фрактальна розмірність може бути знайдена за формулою Каплана–Йорка, яка у нашому випадку набуває вигляду:

$$D_{Fr} = 2 + \frac{\lambda_1}{|2C + E - \lambda_1|}, \tag{2.17}$$

де D_{Fr} – фрактальна розмірність а λ_1 – старший ляпуновський показник.

На рис. 2.8а наведена залежність фрактальної розмірності системи від значень параметра F. Відповідно, на рис. 2.8б наведений збільшений фрагмент рис. 2.8а. Побудований графік також може використовуватися для ідентифікації типу усталеного режиму системи (2.11). Як видно з наведеного рисунка, в розглянутому інтервалі зміни F, у системи існують два типи атракторів. А саме, граничні цикли, яким відповідають ті значення F, для яких фрактальна розмірність дорівнює одиниці й хаотичні атрактори, що відповідають тим значенням F, для яких фрактальна розмірність більше двох. Області хаосу добре визначаються з рис. 2.8а, де для зручності ідентифікації проведена пунктирна лінія $D_{Fr} = 2$. Уважне вивчення рис. 2.8б показує, що хаотичні атрактори, що існують при додатних значеннях F мають, у середньому, більше значення фрактальної розмірності. Крім деякого ускладнення геометричної структури атрактора це означає й більшу швидкість розбігання близьких фазових траєкторій.

На закінчення ще раз підкреслимо, що можливість виникнення дивних атракторів у системі "маятник-електродвигун" пов'язана винятково із взаємодією між її підсистемами – "маятником" і "електродвигуном", а не з автономними властивостями цих підсистем. Застосування методів редукції призводить до того, що моделююча динаміку система диференціальних рівнянь

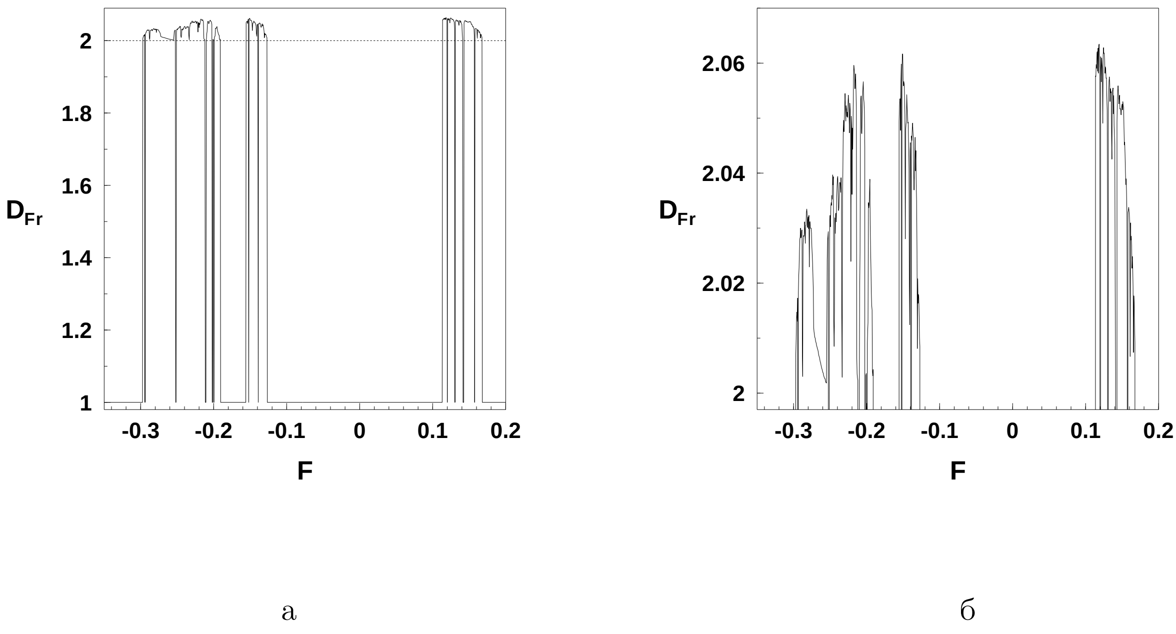


Рис. 2.8: Фрактальна розмірність атракторів.

розщеплюється на дві підсистеми. А саме, "маятникову" , яка має двовимірний фазовий простір і "двигунову" з одновимірним фазовим простором. Ці розщеплені системи вирішуються незалежно одна від іншої. Очевидно, що в таких підсистемах неможливе існування хаотичних атракторів, тому що мінімальна розмірність фазового простору, при якій можливе існування детермінованого хаосу, дорівнює трьом [1, 2, 6]. Тому застосування редукційних підходів приводить до повної втрати інформації про реально існуючі хаотичні атрактори.

2. 3. Сферичний маятник

Сферичний маятник є найпростішим прикладом осцилятора з двома ступенями свободи, що має рівні частоти. Багато явищ, характерних для сферичного маятника, проявляються в динаміці систем с розподіленими параметрами, що мають періодичну координату: кілець, циліндричних і сферичних оболонок, круглих пластин, середовищ в циліндричних і сферичних порожнинах. Тому, знання властивостей коливальних процесів сферичного маятника дає розуміння коливальних ефектів у ряді вищезгаданих систем.

Розглянемо систему, схема якої представлена на рис. 2.9. Кривошипно–шатуний механізм з'єднує ротор електродвигуна із точкою підвісу фізичного маятника, який, на відміну від попереднього розділу , може виконувати просторові коливання. Як відомо, такий маятник називається сферичним. Введемо декартову систему координат $Oxyz$ як показано на рис. 2.9. Позна-

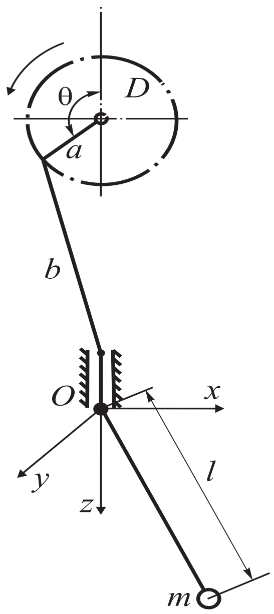


Рис. 2.9: Схема розглянутої системи.

чимо через a, b довжину кривошипа й шатуна, відповідно. Припустимо, що $b \gg a$. Коли кривошип a повертається на кут Θ, повзун з підвісом одержує переміщення, уздовж вертикальної осі нерухливої системи координат, виду $v(t) = -a\cos\Theta$ (див. рис. 2.9). У нерухливій декартовій системі координат $Oxyz$ кінетична енергія системи "маятник–електродвигун" записується у формі [5]

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\dot{v} + \dot{z})^2], \tag{2.18}$$

а потенційна

$$V = mg(l - z - v), \tag{2.19}$$

де x, y, z–декартові координати центру мас маятника; I- момент інерції ротора електродвигуна; m- маса маятника; l- приведена довжина маятника. Масою повзуна й підвісу ми зневажаємо. Введемо нові змінні α і β за формулами:

$$x = l\sin\alpha,\ y = l\sin\beta.$$

Так як в системі координат $Oxyz$ для маятника завжди виконується співвідношення

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

то

$$z = l\sqrt{1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta}.$$

Для малих α і β лагранжіан досліджуваної системи, T-V представимо у вигляді:

$$\begin{gathered}
T - V = \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2[\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 2\alpha\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - 2(\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta})\dot{\Theta}\frac{a}{l}\sin\Theta + \dot{\Theta}^2\frac{a^3}{l^2}\sin^2\Theta] - \\
-gml(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{24} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^4}{24} + \frac{\alpha^2\beta^2}{4} + \frac{a}{l}\cos\Theta).
\end{gathered} \tag{2.20}$$

Тому, для основних змінних $\Theta(t)$, $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ рівняння Лагранжа (рівняння руху) запишуться в наступній формі [5]:

$$\begin{gathered}
I\ddot{\Theta} = L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) - mla[\ddot{\Theta}\frac{a}{l}\sin^2\Theta + \dot{\Theta}^2\frac{a}{l}\sin\Theta\cos\Theta + \frac{g}{l}\sin\Theta - \\
-(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)\sin\Theta - (\alpha\ddot{\alpha} + \beta\ddot{\beta})\sin\Theta]; \\
\ddot{\alpha} + \omega_0^2(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha\beta^2}{2}) + \delta_1\dot{\alpha} + \alpha(\dot{\beta}^2 + \beta\ddot{\beta}) - \\
-\frac{a}{l}\alpha(\dot{\Theta}^2\cos\Theta + \ddot{\Theta}\sin\Theta) = 0; \\
\ddot{\beta} + \omega_0^2(\beta - \frac{\beta^3}{6} + \frac{\alpha^2\beta}{2}) + \delta_1\dot{\beta} + \beta(\dot{\alpha^2} + \alpha\ddot{\alpha}) - \\
-\frac{a}{l}\beta(\dot{\Theta}^2\cos\Theta + \ddot{\Theta}\sin\Theta) = 0.
\end{gathered} \tag{2.21}$$

Тут $L(\dot{\Theta})$–рушійний момент електродвигуна; $H(\dot{\Theta})$–внутрішній момент сил опору обертанню ротора електродвигуна; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ – власна частота маятника; δ_1–коефіцієнт демпфірування сили опору середовища, у якім рухається маятник.

Отримана система диференціальних рівнянь описує складний процес взаємодії обертання вала двигуна і просторових коливань маятника. Вона є суттєво нелінійною й не допускає точного аналітичного розв'язку. Для спрощення системи рівнянь (2.21) введемо малий параметр $\varepsilon = \dfrac{a}{l}$, вважаючи $a \ll l$. Крім того, припустимо, що реалізуються умови основного параметричного резонансу, коли швидкість обертання вала двигуна $\dot{\Theta}$ близька до подвоєної власної частоти маятника $2\omega_0$, а саме

$$\dot{\Theta}(t) = 2\omega_0 + \varepsilon\omega_0\nu(t). \tag{2.22}$$

Для дослідження резонансних коливань маятника виконаємо в рівняннях (2.21) заміну змінних за формулами:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}[y_1(\tau)\cos\frac{\Theta(t)}{2} + y_2(\tau)\sin\frac{\Theta(t)}{2}]; \\ \beta(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}[y_4(\tau)\cos\frac{\Theta(t)}{2} + y_5(\tau)\sin\frac{\Theta(t)}{2}]. \end{aligned} \tag{2.23}$$

За допомогою даної заміни ми перейдемо, у рівняннях (2.21), до нових змінних $y_1(\tau), y_2(\tau), y_4(\tau), y_5(\tau)$ і повільного часу τ,

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4}\Theta(t).$$

Підставимо вирази (2.23) у рівняння (2.21) і проведемо процедуру усереднення за швидким часом $\Theta(t)$. При цьому, врахуємо, що:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha(t)}{dt} &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2}\frac{d\Theta(t)}{dt}[-y_1(\tau)\sin\frac{\Theta(t)}{2} + y_2(\tau)\cos\frac{\Theta(t)}{2}]; \\ \frac{d\beta(t)}{dt} &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2}\frac{d\Theta(t)}{dt}[-y_4(\tau)\sin\frac{\Theta(t)}{2} + y_5(\tau)\cos\frac{\Theta(t)}{2}]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Після проведення процедури усереднення за швидким часом одержимо наступну систему рівнянь [5]:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{d\tau} &= Cy_1 - [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_2 - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_4 + 2y_2;\\
\frac{dy_2}{d\tau} &= Cy_2 + [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_1 - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_5 + 2y_1;\\
\frac{dy_3}{d\tau} &= D(y_1y_2 + y_4y_5) + Ey_3 + F;\\
\frac{dy_4}{d\tau} &= Cy_4 - [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_5 + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_1 + 2y_5;\\
\frac{dy_5}{d\tau} &= Cy_5 + [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_4 + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_2 + 2y_4.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

При виведенні системи рівнянь (2.25) використовувалася лінійна апроксимація статичної характеристики двигуна, коли

$$
\frac{L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta})}{I + \frac{1}{2}ma^2} = \varepsilon\frac{\omega_0}{2}(N_0 - E\dot{\Theta}) + \varepsilon^2 + \dots\,. \tag{2.26}
$$

Тому

$$
F = (\frac{N_0}{\omega_0} - 2E)\frac{l}{a},\; D = -\frac{2ml^2}{I + \frac{1}{2}ma^2},\; C = -\frac{\delta_1}{\omega_0}.
$$

Крім того, у системі (2.25) введене позначення $y_3 = \nu$.

Отримана система диференціальних рівнянь п'ятого порядку (2.25) використовується в якості математичної моделі детермінованої коливальної динамічної системи "сферичний маятник–електродвигун". Відмітимо, що більшість досліджень динаміки сферичного маятника проводилося й проводиться в припущенні, що джерело збудження коливань маятника ідеальне, тобто має необмежену потужність. Зрозуміло такий підхід приводить до припущення про необмеженість потужності електродвигуна, що збуджує коливання маятника. Тобто, має місце своєрідна реалізація концепції "вічного двигуна". Зрозуміло, з метою подолання такого концептуального протиріччя, допускають, що потужність електродвигуна не необмежена, а настільки велика, що маятник виявляє нехтуємо малий вплив на обертання вала електродвигуна.

Покажемо до яких грубих помилок у визначенні усталених коливань маятника призводить така ідеалізація джерела збудження коливань.

При ідеалізації джерела збудження, система рівнянь (2.25) розщеплюється на дві підсистеми. Одна підсистема складається з першого, другого, четвертого й п'ятого рівнянь системи (2.25). Друга підсистема складається з одного третього рівняння системи (2.25). Причому, так як впливом коливань маятника на обертання вала двигуна нехтують, у цьому рівнянні вважаються $D = 0$. Тоді третє рівняння (2.25) стає лінійним і для нього елементарно може бути знайдений загальний розв'язок (функція y_3), який потім підставляється в першу підсистему. Надалі можна проводити дослідження розв'язків першої, "маятникової" підсистеми. Відмітимо, що при застосуванні ідеалізації джерела збудження не вдається виявити хаотичних усталених коливань маятника при вертикальному збудженні точки його підвісу [5].

Подальшою метою дослідження є вивчення можливих типів атракторів системи рівнянь (2.25). Тому що дана система є досить складною нелінійною системою рівнянь, то для побудови її атракторів застосовується цілий комплекс чисельних методів і алгоритмів. Методика проведення таких досліджень детально викладена нами в попередньому розділі.

При проведенні чисельних розрахунків покладалося, що параметри системи (2.25) мають наступні значення:

$$C = -0.5, \quad D = -1, \quad F = 0.5. \tag{2.27}$$

Початкові умови варіювалися в околі початку координат фазового простору системи рівнянь (2.25).

У якості біфуркаційного розглядався параметр E – кут нахилу статичної характеристики електродвигуна, що залежить від типу застосовуваного двигуна. Покажемо, що при так обраних значеннях в просторі параметрів системи існують значні області, в яких у системи (2.25) існують хаотичні атрактори.

Дослідження ідентифікації типів атракторів системи (2.25) починаємо з розрахунків старшого ляпуновського характеристичного показника. Нагадаємо, що додатність такого показника є основним практичним критерієм хаотичної поведінки системи. На рис. 2.10 наведена залежність старшого ляпуновського характеристичного показника λ від кута нахилу статичної характеристики E. Як видно з наведеного рисунка, практично для всіх $E \in (-1.27, -0.1)$ у системи існують хаотичні атрактори. На графіку також помітні провали значення старшого ляпуновського показника, які відповідають вузьким вікнам періодичності. Цих вікон більше в лівій частині графіка.

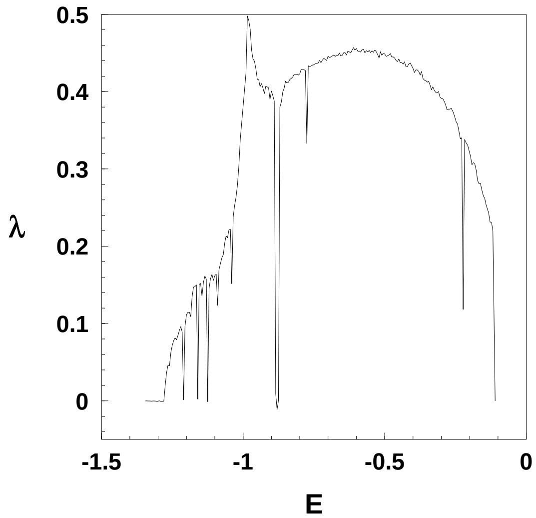


Рис. 2.10: Залежність старшого ляпуновського характеристичного показника від кута нахилу статичної характеристики.

При значеннях $E \geq -1.75$ у системі (2.25) існує стійкий граничний цикл досить простої структури. При $E = -1.42$ такий цикл втрачає стійкість і в його околі виникає стійкий граничний цикл подвоєного періоду. Відбувається перша біфуркація подвоєння періоду циклу. При подальшім зростанні значень E у системі триває каскад біфуркацій подвоєння. Проекції фазового портрету циклу й декількох біфуркацій подвоєння його періоду наведені на рис. 2.11 і рис. 2.12. Одна з наведених на рисунках проекцій включає змінні y_1, y_2, пропорційні маятниковій кутовій змінній α, і змінну y_3, що характеризує обертання вала електродвигуна. Друга, з наведених на рисунках проекцій, включає по одній компоненті з маятникових змінних α, β і змінну y_3. На рисунках добре помітне подвоєння тактності граничних циклів з кожною наступною біфуркацією. Цей нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду циклу завершується народженням хаотичного атрактора в критичній точці $E \approx -1.275$. Таким чином, перехід до хаосу відбувається у відповідності зі сценарієм Фейгенбаума.

На рис. 2.13а–б наведені проекції виниклого в результаті каскаду біфуркацій подвоєння хаотичного атрактора. Цей атрактор має спіральну структуру й трохи нагадує хаотичні атрактори знайдені нами для плоского маятника. Слід підкреслити, що такі хаотичні атрактори мають якусь, іноді досить значну, подібність фазового портрету до фазових портретів циклів великої тактності, при біфуркаціях яких народжуються такі хаотичні атрактори. Однак тут є одна принципова відмінність. Граничні цикли, незважаючи на них як завгодно велику тактність, характеризуються регулярним поверненням траєкторії в будь-яку точку циклу через час строго рівний періоду циклу. У випадку ж хаотичного атрактора картина зовсім інша. Траєкторія обов'язково нескінченне число раз повертається в кожний, як завгодно малий, окіл атрактора, але час таких повернень непередбачуваний. Моменти часу цих повернень утворюють деяку хаотичну послідовність.

На рис. 2.13в–г наведені проекції перерізу Пуанкаре, площиною $y_3 = -15$ і відображення Пуанкаре по змінній y_2. Як видно з наведених рисунків, переріз Пуанкаре має квазістрічкову структуру. Число точок цього перерізу постійно росте з зростанням часу чисельного інтегрування. Його точки утворюють деяку хаотичну множину точок. Відповідно відображення Пуанкаре за формою нагадує одномірну криву з локальним максимумом. Це може бути доказом того, що система (2.25) перебуває в хаотичному режимі. Дане одномірне відображення може служити для наближеного вивчення динаміки

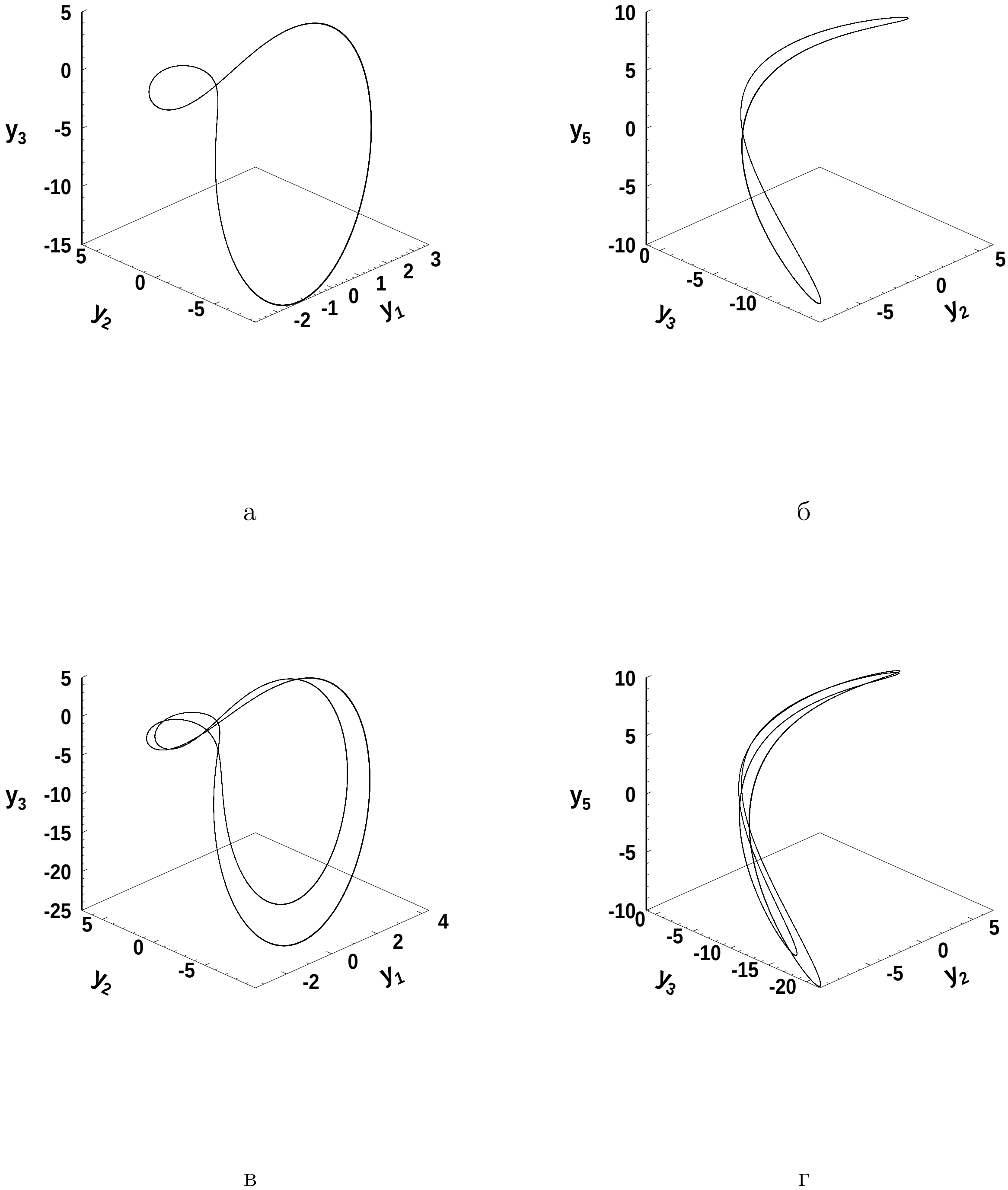
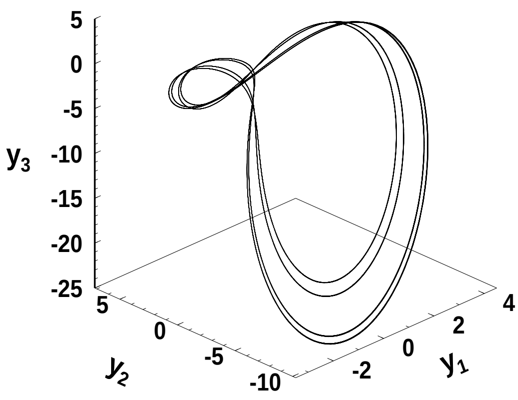
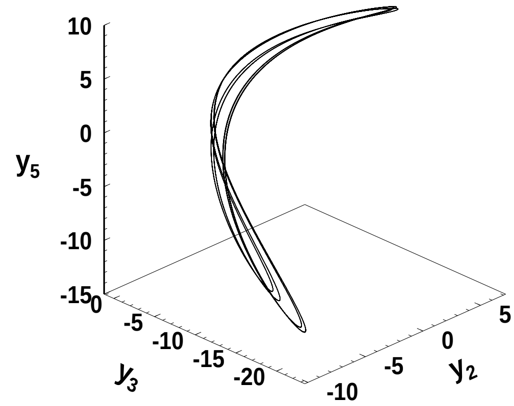


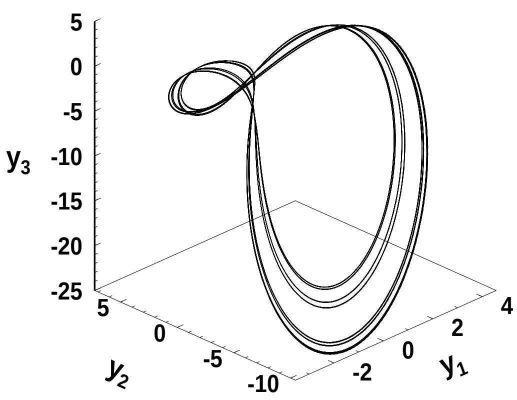
Рис. 2.11: Проекції фазового портрету граничного циклу при $E = -1.43$ *(а)*, *(б)* і першої біфуркації подвоєння при $E = -1.31$ *(в)*, *(г)*.



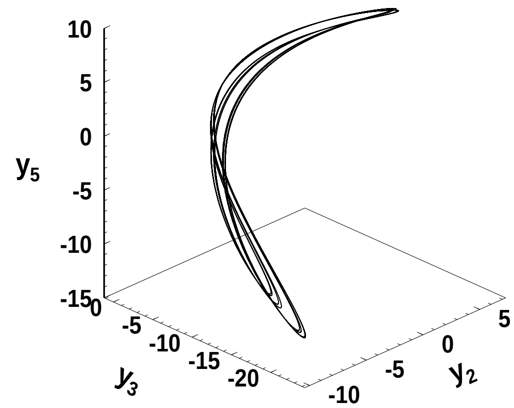
а



б

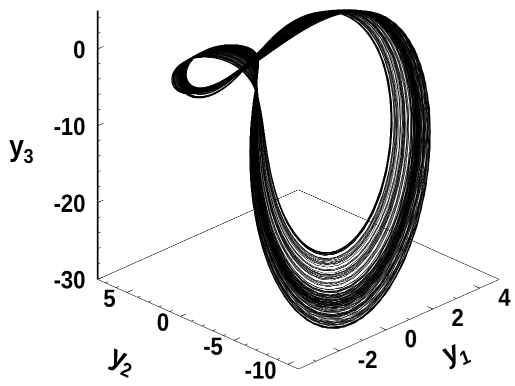


в

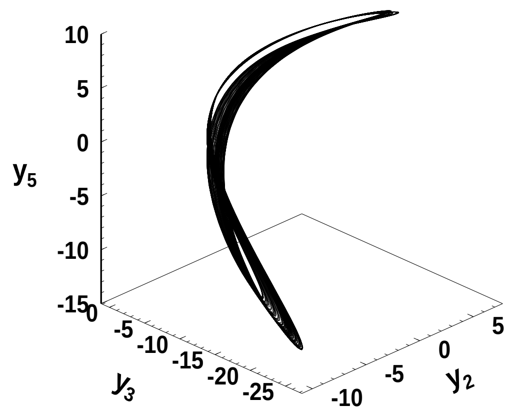


г

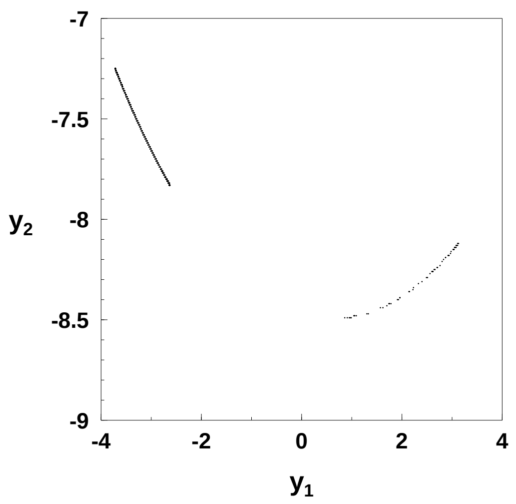
Рис. 2.12: Проекції фазового портрету другої біфуркації подвоєння при $E = -1.29$ *(а)*, *(б)* і третьої біфуркації подвоєння при $E = -1.28$ *(в)*, *(г)*.



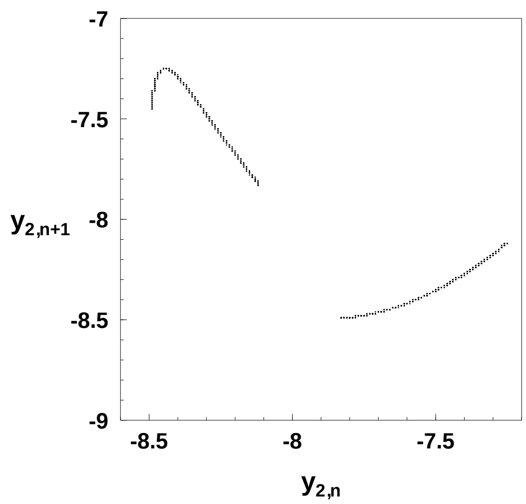
а



б



в



г

Рис. 2.13: Проекції фазового портрету хаотичного атрактора при $E = -1.25$ *(а)*, *(б)* його переріз *(в)* і відображення Пуанкаре *(г)*.

системи. Природно, що дослідження одномірних відображень набагато простіше досліджень систем диференціальних рівнянь із розмірністю фазового простору рівної п'яти. Таким чином, виявлений хаотичний атрактор має деяку якісну подібність з хаотичними атракторами, знайденими в плоского маятника. До речі, старший ляпуновський характеристичний показник побудованого хаотичного атрактора рівний 0.072. Така величина показника близька до величин старших ляпуновських показників хаотичних атракторів плоского маятника. Відзначимо ще одну особливість виявлених атракторів системи, як регулярних, так і хаотичних. Вони мають симетрію фазових портретів по змінним y_1, y_2 і y_4, y_5, відповідно. Це пояснюється симетрією рівнянь (2.25) відносно даних змінних.

Як ми вже встановили раніше усталені хаотичні режими, які виникають у системі (2.25) при $E \approx -1.275$ продовжують існувати на дуже значному інтервалі зміни E. При зростанні значення E у системі спостерігаються структурні перебудови типу "хаос–хаос" , тобто хаотичний атрактор одного типу в результаті внутрішніх біфуркаційних явищ змінюється хаотичним атрактором іншого типу. Простежимо за зміною властивостей хаотичних атракторів при зростанні E.

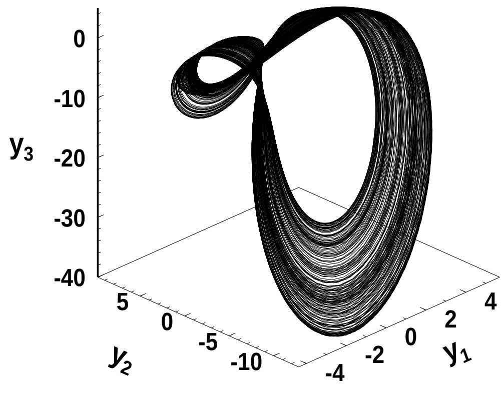
При $-1.27 \leq E \leq -1.18$ спостерігається розвиток хаотичного атрактора, що полягає в збільшенні об'єму області у фазовому просторі, у якій перебувають траєкторії атрактора, і більш щільному заповненні цієї області траєкторіями атрактора. Проекція фазового портрету хаотичного атрактора, побудованого при $E = -1.18$ наведена на рис. 2.14а. Переріз і відображення Пуанкаре для цього атрактора якісно ідентичні наведеним на рис. 2.13в–г. Відбувається деякий ріст величини старшого ляпуновського показника, який при $E = -1.18$ досягає значення 0.134. При $E = -1.17$ кількісні зміни, що накопичуються, призводять до помітної перебудови структури існуючого хаотичного атрактора. Проекція фазового портрету такого атрактора, його переріз і відображення Пуанкаре наведені на рис. 2.14б–г. Як видно з рисунків, що особливо помітно, при порівнянні з наведеними на рис. 2.13в–г, змінилися переріз і відображення Пуанкаре атрактора, хоча переріз Пуанкаре продовжує мати квазістрічкову структуру.

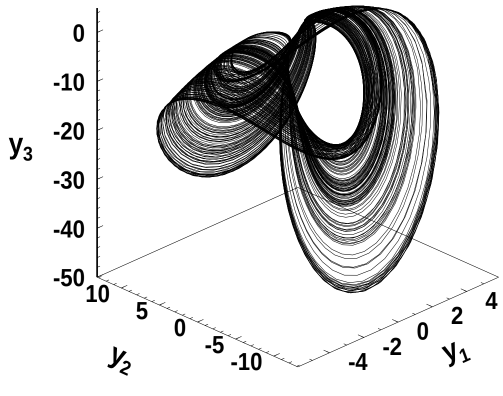
При подальшому зростанні E спостерігається дуже помітне збільшення фазового об'єму області локалізації траєкторій атрактора, особливо по напряму змінної y_3. Помітно, до 0.34 зростає старший ляпуновський характеристичний показник, що свідчить про значне збільшення швидкості розбігання близьких фазових траєкторій атрактора. На рис. 2.15 наведені, відповідно, проекції фазового портрету, перерізу й відображення Пуанкаре хаотичного атрактора при $E = -1.01$. Дуже своєрідний вид здобуває двовимірна проекція фазового портрету. Виниклий "двоокий" атрактор дуже нагадує відомого "метелика" атрактора Лоренца, що свідчить про тісний зв'язок різних типів хаотичних атракторів з різних розділів нелінійної динаміки. Як і у всіх, раніш розглянутих у цьому параграфі, хаотичних атракторів, переріз Пуанкаре (рис. 2.15в) має квазістрічкову структуру. Але дуже помітно ускладнилося відображення Пуанкаре (рис. 2.15г), яке представляє суперпозицію декількох ліній типу парабол.

Слід зазначити, що в інтервалі зміни параметра $-1.27 \leq E \leq -1.01$ області хаосу чергуються з невеликими вікнами періодичності.

При проходженні параметром E точки -1.0 у системі відбувається жорстка біфуркація типу "хаос–хаос" у результаті якої виникає хаотичний атрактор іншого типу. На рис. 2.16 наведені різні характеристики нового хаотичного атрактора. Як видно з рисунка відбувається поворот проекції фазового портрету. Особливо наочно це проявляється при порівнянні двовимірних проекцій з рис. 2.15б і 2.16б, з яких добре видний поворот "очей", що відбувся в нового атрактора по порівнянню з раніш існуючим. Змінюється й переріз Пуанкаре (рис. 2.16в), точки якого починають розбігатися на січній площині, втрачаючи квазістрічкову структуру. Дуже міняється вигляд відображення Пуанкаре (рис. 2.16г), яке тепер представляє собою надзвичайно складну суперпозицію ліній, серед яких явно проглядаються різні параболи.

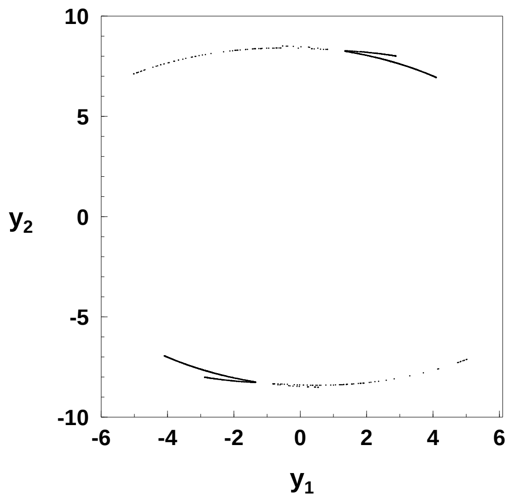
Такий тип хаотичного атрактора існує, за винятком вузького вікна пе-

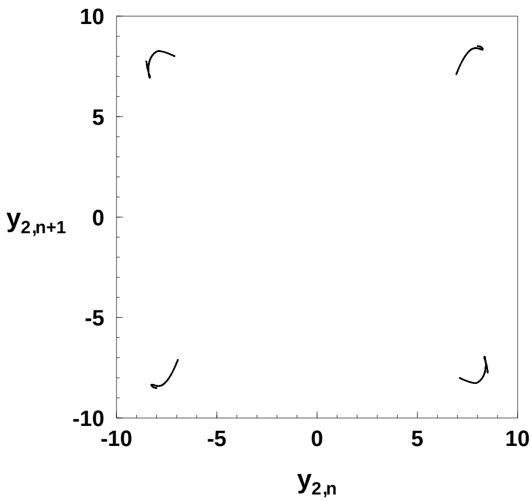




а

б





в

г

Рис. 2.14: Проекція фазового портрету хаотичного атрактора при $E = -1.18$ *(а)*; проекція фазового портрету *(б)*, переріз *(в)* і відображення Пуанкаре *(г)* хаотичного атрактора при $E = -1.17$.

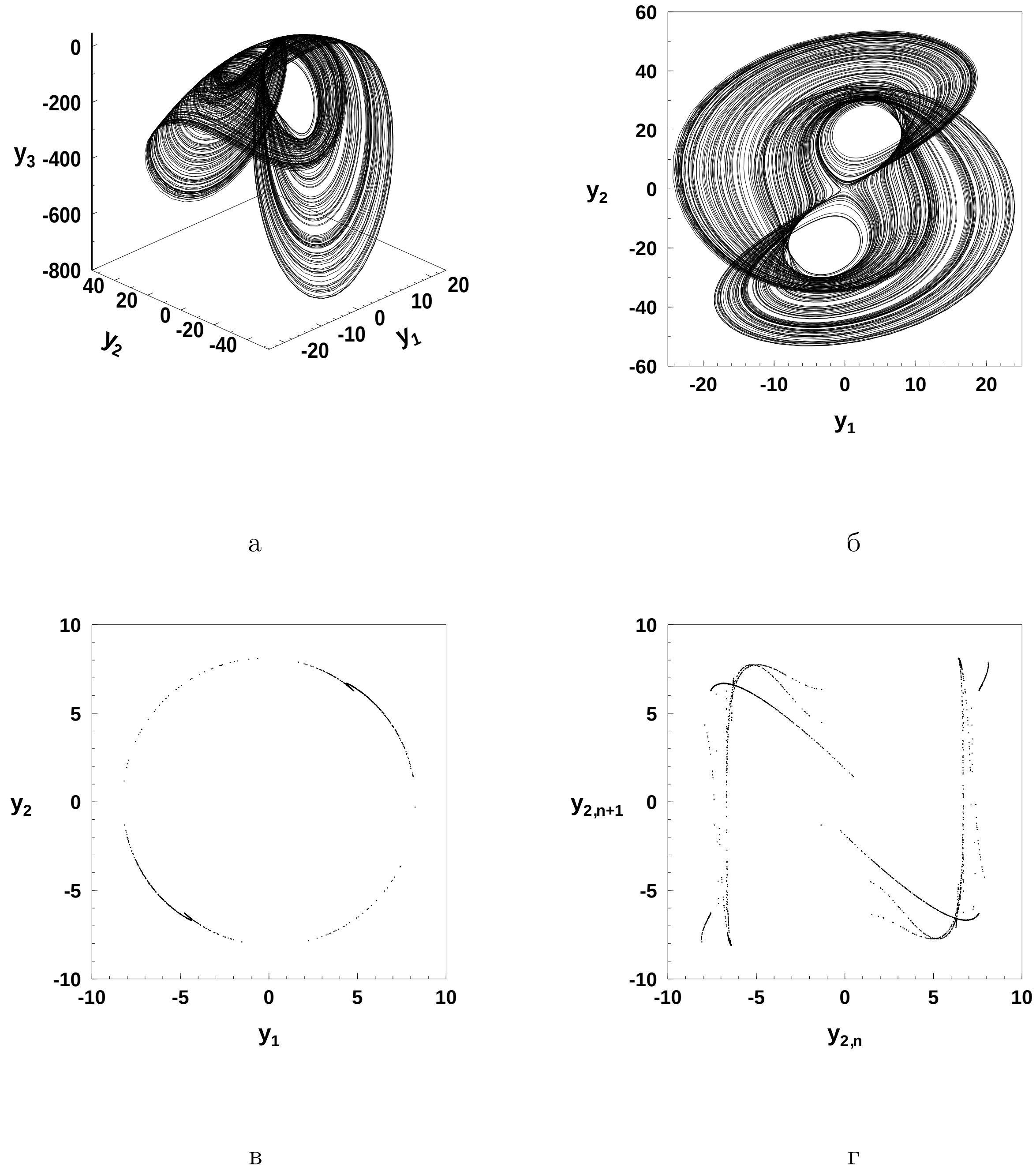


Рис. 2.15: Проекції фазового портрету хаотичного атрактора *(а)*, *(б)*, його переріз *(в)* і відображення Пуанкаре *(г)* при $E = -1.01$.

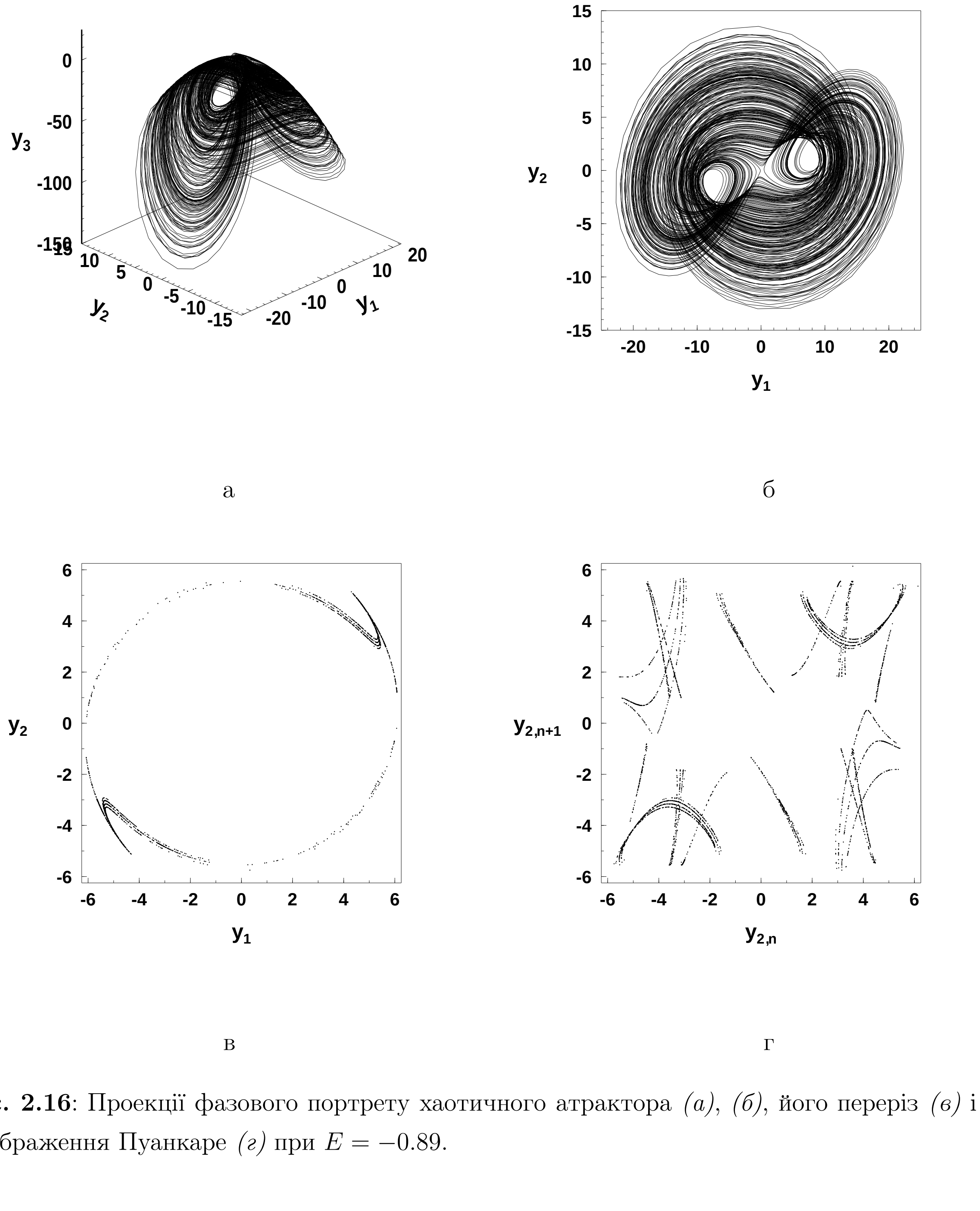


Рис. 2.16: Проекції фазового портрету хаотичного атрактора *(а)*, *(б)*, його переріз *(в)* і відображення Пуанкаре *(г)* при $E = -0.89$.

ріодичності, на всьому подальшому дослідженому інтервалі зміни значень E. Однак у структурі атрактора відбуваються деякі зміни при збільшенні E. Так, на рис. 2.17 наведені характеристики хаотичного атрактора побудованого при $E = -0.61$. Цей хаотичний атрактор має найбільший старший ляпуновський показник рівний 0.457, що помітно перевершує аналогічні показники атракторів, виявлених нами при $E < -1$. Як ми вже відзначали, це свідчить про більшу швидкість розбігання, нестійких за Ляпуновим, близьких у початковий момент часу траєкторій атрактора. При загальній схожості фазових портретів даного атрактора й наведеного на рис. 2.16а–б, відзначимо зникнення "очей" на двовимірній проекції фазового портрету. Змінюється, у порівнянні з попереднім випадком, і вид перерізу Пуанкаре, точки якого починають хаотично групуватися уздовж декількох кривих, що віддалено нагадують концентричні кола. Ще більш ускладнюється відображення Пуанкаре, що унеможливлює будь-яку одномірну дискретну апроксимацію розглянутої задачі.

При подальшім збільшенні значень E починає помітно зменшуватися фазовий об'єм області, у якій розташовується хаотичний атрактор . Нарешті, при $E = -0.1$ відбувається руйнування хаотичного атрактора й у системі (2.25) виникає стійке положення рівноваги. На рис. 2.18 наведений переріз і відображення Пуанкаре, а також розподіл природної інваріантної міри по проекції фазового портрета для хаотичного атрактора, побудованого при $E = -0.12$, тобто незадовго до його зникнення. Точки перерізу Пуанкаре чітко хаотично групуються уздовж кривих, що нагадують за формою концентричні кола. Відображення Пуанкаре практично здобуває вид деякого точкового відображення. Дуже цікавий вигляд має розподіл інваріантної міри для фазового портрета атрактора (рис. 2.18в). Густе затемнення в центрі рисунка показує, що основний час траєкторії атрактора перебувають в околі точки (0, 0). Ця точка є проекцією нестійкого положення рівноваги системи (2.25). Хаос здобуває структуру досить типову для переміжності. Фазові траєкторії даного атрактора системи намагаються притягтися до нульового

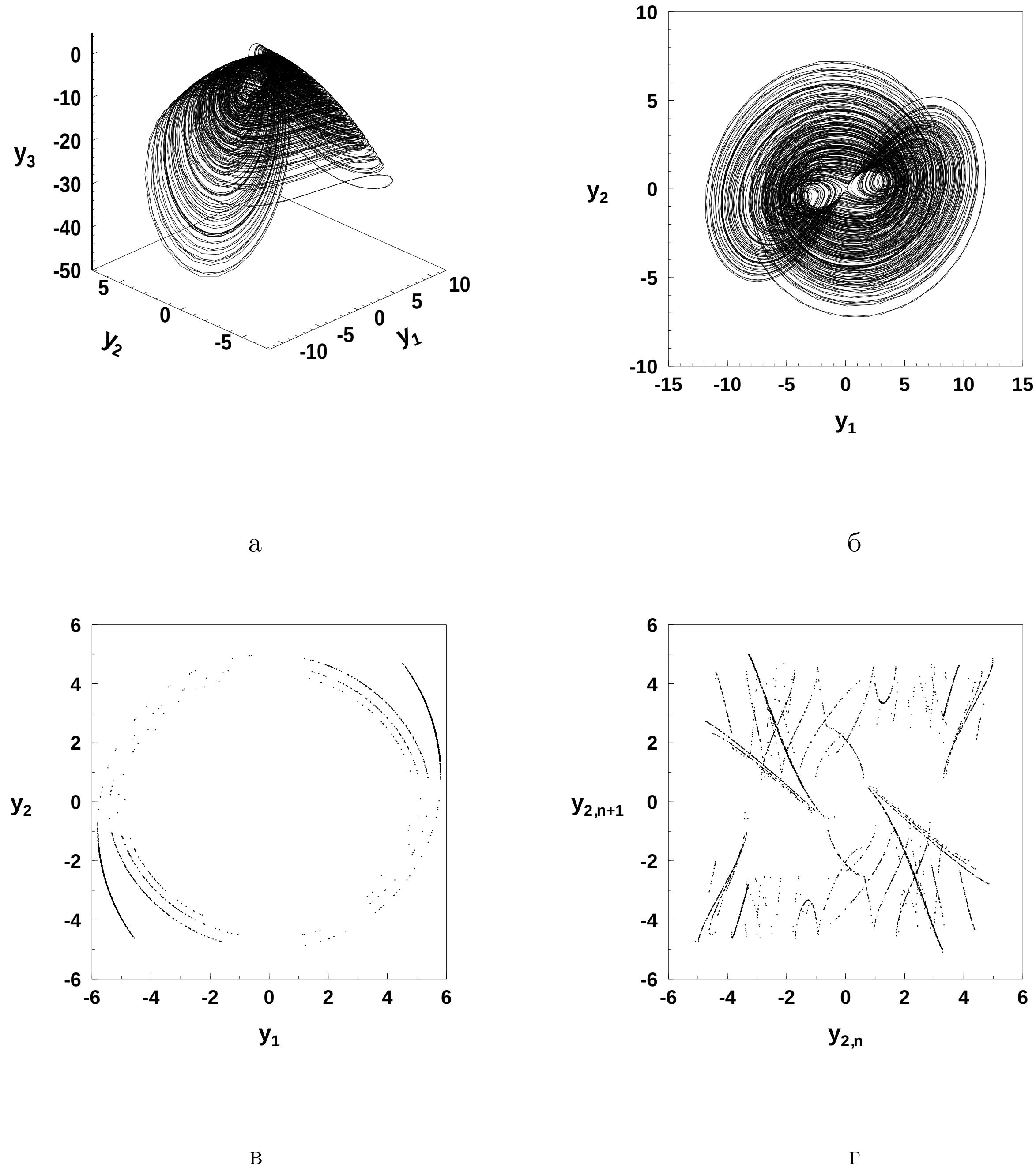
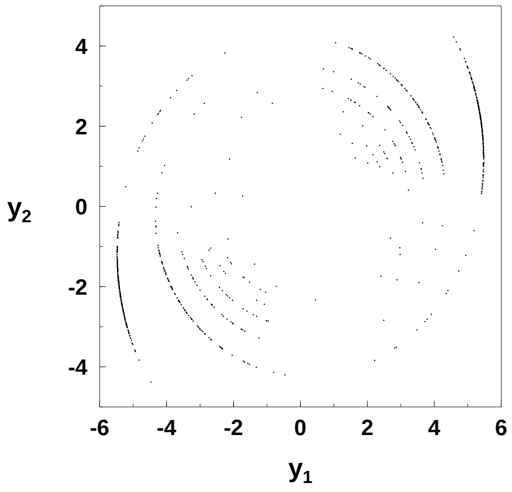


Рис. 2.17: Проекції фазового портрету хаотичного атрактора *(а)*, *(б)*, його переріз *(в)* і відображення Пуанкаре *(г)* при $E = -0.61$.

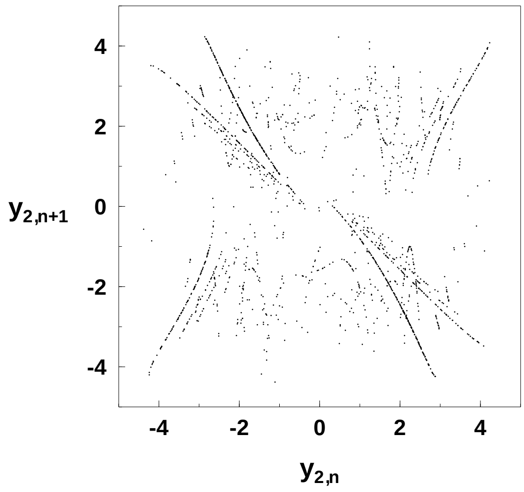
положення рівноваги, внаслідок чого вони тривалий час блукають у малому околі цього положення (ламінарна стадія, якій відповідають густо затемнені ділянки на рис. 2.18в). Потім, у непередбачуваний наперед момент часу відбувається турбулентний сплеск, що супроводжується неперіодичними розкручуваннями по витках спіралі атрактора.

Розглянемо характерні риси розподілу спектральних густин (Фур'є–спектрів) для різних типів атракторів системи (2.25). Так на рис. 2.19а–в наведені розподіли спектральних густин для деяких біфуркацій з раніш вивченого нами каскаду біфуркацій подвоєння періодів граничних циклів системи, які мали місце для значень $E \in (-1.45, -1.275)$ (див. рис. 2.11– 2.12). Відповідно на рис. 2.19а наведені Фур'є–спектри першої, на рис. 2.19б – другої, а на рис. 2.19в – третьої біфуркації каскаду. Усі наведені спектри є дискретними з чіткими піками на основних гармоніках розкладу часових реалізацій граничних циклів у ряд Фур'є. Причому, число піків цих дискретних спектрів подвоюється з кожною новою біфуркацією. На рис. 2.19г наведений Фур'є–спектр хаотичного атрактора, який виникає в результаті цього нескінченного каскаду. Як видно з рис. 2.19г, спектр стає неперервним, що є ще одним підтвердженням того, що система (2.25) перебуває в хаотичному режимі. Однак в неперервному спектрі з рис. 2.19г чітко видні піки гармонік зниклих граничних циклів.

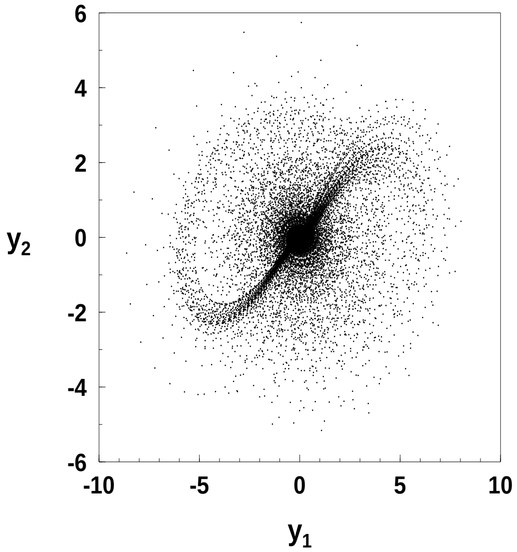
Розвиток хаосу при зростанні E, крім змін структури фазового портрету й інших характеристик хаотичних атракторів, також приводить до помітних змін їх Фур'є–спектрів. Так, на наступному рисунку наведені Фур'є–спектри хаотичних атракторів існуючих у системі при $E = -1.17$ (рис. 2.20а) і при $E = -1.01$ (рис. 2.20б). Спектр наведений на (рис. 2.20а) відповідає значенню E, при якому спостерігається помітна зміна структури фазового портрету хаотичного атрактора в порівнянні з фазовим портретом хаосу, виниклого в результаті каскаду біфуркацій подвоєння. У свою чергу спектр, наведений на рис. 2.20б відповідає хаотичному атрактору, що існує біля правого порогу жорсткої перебудови хаотичних режимів. Обидва спектри є неперервними.



а

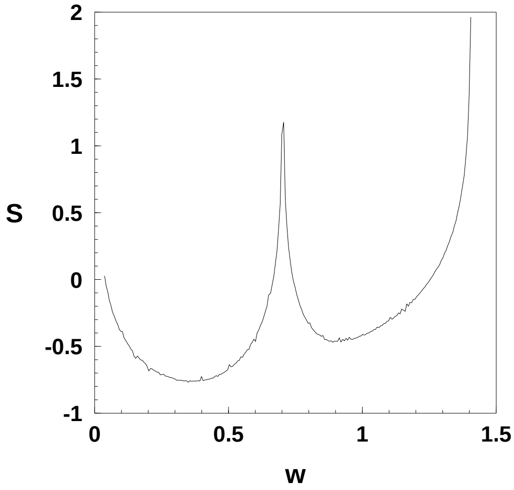


б

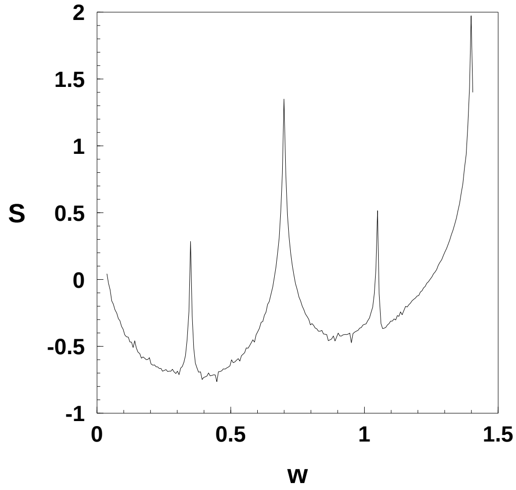


в

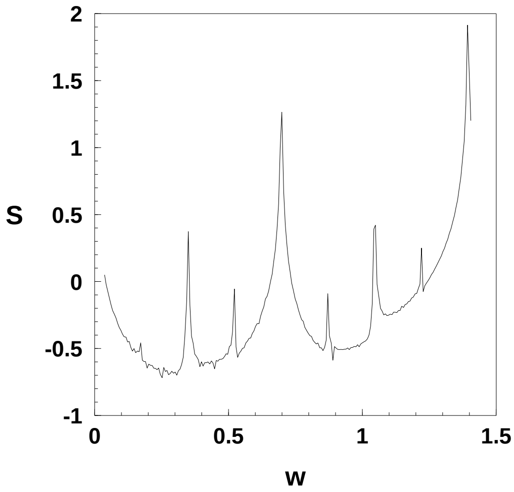
Рис. 2.18: переріз *(а)*, відображення Пуанкаре *(б)* і розподіл інваріантної міри хаотичного атрактора *(в)* при $E = -0.12$.



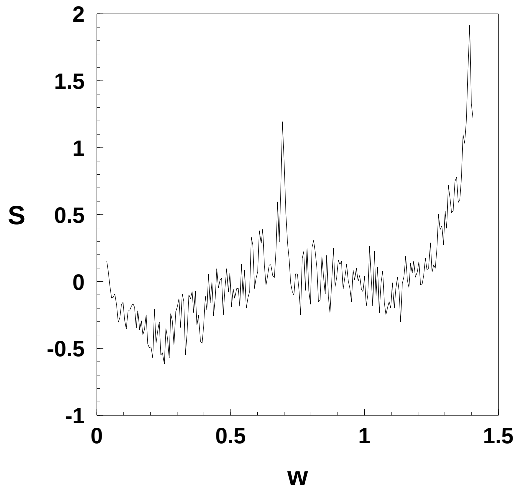
а



б

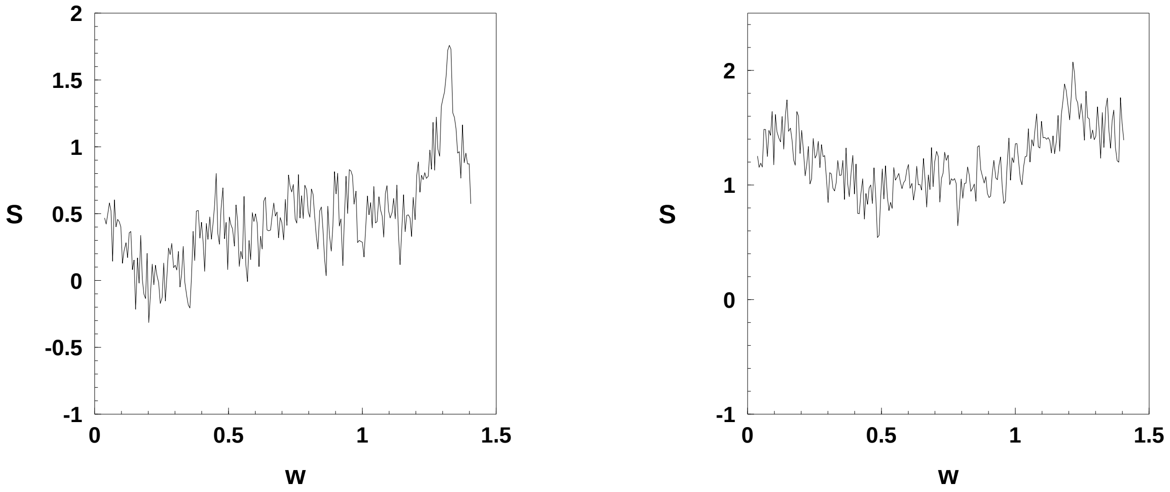


в



г

Рис. 2.19: Розподіл спектральної густини перших трьох біфуркацій подвоєння *(а)*, *(б)*, *(в)* і розподіл спектральної густини хаотичного атрактора при $E = -1.25$*(г)* .



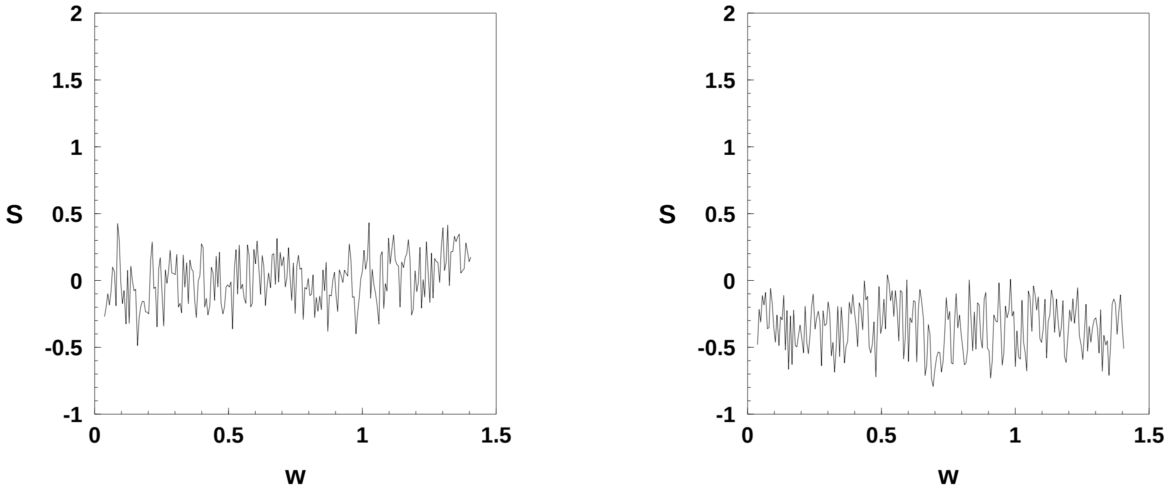
а б

Рис. 2.20: Розподіл спектральної густини хаотичного атрактора при $E = -1.17$ *(а)* і при $E = -1.01$ *(б)* .

Однак, у порівнянні з раніш розглянутим випадком, починає спостерігатися руйнування піків спектра(лівий рисунок), яке в кінці кінців призводить до повної відсутності піків у неперервному спектрі атрактора.

Нарешті, розглянемо Фур'є–спектри хаотичних атракторів існуючих у системі після жорсткої біфуркації типу "хаос–хаос", тобто при $E > -1.0$. На рис. 2.21 наведені спектри двох таких хаотичних атракторів. Причому, рис. 2.21а відповідає значенню $E = -0.61$ (хаотичний атрактор з найбільшим старшим ляпуновським показником), а рис. 2.21б відповідає значенню $E = -0.12$ (атрактор біля порогу зникнення хаосу). Обидва спектри є неперервними й являють собою якийсь "шумовий" п'єдестал з повною відсутністю якихось помітних піків і відсутністю завалів по всій області розглянутих частот. Такі "рівномірні" Фур'є–спектри властиві усім хаотичним атракторам, існуючим у системі при $E > -1.0$.

Викликає інтерес порівняння отриманих результатів з випадком ідеалізації джерела збудження коливань. Як ми вже відзначали раніш, при такому



а б

Рис. 2.21: розподіл спектральної густини хаотичного атрактора при $E = -0.61$ *(а)* і при $E = -0.12$ *(б)* .

підході проводиться редукція системи рівнянь (2.25), після проведення якої досліджується нова система, що полягає з першого, другого, четвертого й п'ятого рівнянь системи (2.25). При цьому, невідома функція y_3 вважається постійним параметром. Було проведено чисельне інтегрування такої системи рівнянь при $C = -0.5$ і значеннях y_3 змінних у границях від -250 до 30. Відмітимо, що це границі зміни амплітуд коливань функції y_3 в усталених хаотичних режимах. При чисельних розрахунках значення y_3 змінювалося з дуже малим кроком. У всіх випадках спостерігається вихід системи на стійке положення рівноваги, причому для $|y_3| \geq 3$ це положення рівноваги завжди має вигляд $y_1 = y_2 = y_4 = y_5 = 0$. У даній області зміни параметрів не виявлено не тільки хаотичних атракторів, але навіть і стійких граничних циклів [5]. Це, в черговий раз, свідчить до яких грубих помилок в описі динаміки системи призводить нехтування взаємодією коливальної підсистеми з джерелом збудження коливань. Передбачувані прості стійкі положення рівноваги в дійсності виявляються найскладнішими хаотичними атракторами.

2. 4. Питання для самоконтролю

1. Що таке коливальна система з обмеженим збудженням.

2. Як визначається кінетична та потенційна енергія системи "маятник – електродвигун".

3. Як вводиться малий параметр у системі "маятник – електродвигун".

4. Як визначається повільний час.

5. Запишіть основну математичну модель системи "маятник – електродвигун".

6. Як довести дисипативність системи "маятник – електродвигун".

7. Як виводяться умови асимптотичної стійкості системи "маятник – електродвигун".

8. Яка методика застосовується для дослідження усталених режимів вищевказаної системи.

9. Як доводиться існування детермінованого хаосу в системі "маятник – електродвигун".

10. Опишіть перехід до хаосу в системі "маятник – електродвигун"за сценарієм Фейгенбаума.

11. Як ідентифікується перехід до хаосу за допомогою розподілів природної інваріантної міри.

12. Що таке вікно періодичності.

13. Опишіть перехід до хаосу в системі "маятник – електродвигун"за сценарієм Помо–Манневілля.

14. Що таке карта динамічних режимів.

15. Як визначається фрактальна розмірність системи "маятник – електродвигун".

16. До яких грубих помилок може призвести застосування методів редукції в системі "маятник – електродвигун".

17. Як вводяться узагальнені координати системи "сферичний маятник – електродвигун".

18. Запишіть основну математичну модель системи "сферичний маятник – електродвигун".

19. Який основний критерій застосовується для встановлення існування детермінованого хаосу в системі "сферичний маятник – електродвигун".

20. Як здійснюється реалізація сценарію Фейгенбаума в системі "сферичний маятник – електродвигун".

21. Які перерізи та відображення Пуанкаре притаманні системі "сферичний маятник – електродвигун".

22. Особливості хаотичних атракторів системи "сферичний маятник – електродвигун"

23. Чи можливий гіперхаос у системі "сферичний маятник – електродвигун".

24. Особливості Фур'є–спектрів системи "сферичний маятник – електродвигун".

25. До чого може призвести нехтування обмеженістю збудження.

Бібліографія

[1] Анищенко В.С. *Сложные колебания в простых системах.*– М.:Наука.– 1990.– 312с.

[2] Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах.*–Москва–Ижевск.:ИКИ.– 2003.– 530с.

[3] Кононенко В.О. *Колебательные системы с ограниченним возбуждением.* —М.: Наука, 1964. — 256 с.

[4] Кубенко В.Д., Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. и др. *Нелинейная динамика осесимметричных тел, несущих жидкость.*–Киев: Наук. думка, 1992.–184с.

[5] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. *Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением.* — Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" , Институт компьютерных исследований, 2008. — 280 с.

[6] Кузнецов С.П. *Динамический хаос.* — Москва: Физматлит, 2006. — 356 с.

[7] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. *Стохастические и хаотические колебания.*–М.: Наука, 1987.–424с.

[8] Хайрер Е., Нерсетт С.П., Ваннер Г. *Решение обыкновенних дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи.* — М.: Мир, 1990. — 512 с.