

Национальный Технический Университет Украины "Киевский  
политехнический институт"

На правах рукописи

Швец Александр Юрьевич

УДК 519.7:534.1

# Детерминированный хаос в динамических системах с ограниченным возбуждением

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения

## ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Научный консультант

Самойленко Анатолий Михайлович

академик НАН Украины

доктор физико–математических наук, профессор

КИЕВ – 2007

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 Обзор литературы</b>	<b>17</b>
1.1 Детерминированный хаос. . . . .	17
1.2 Теория систем с ограниченным возбуждением. . . . .	25
<b>2 Описание основных методов исследования</b>	<b>32</b>
2.1 Основные понятия и определения . . . . .	32
2.1.1 Понятие про динамическую систему . . . . .	32
2.1.2 Кинематическая интерпретация и краткая классификация	33
2.1.3 Предельные множества динамических систем. Понятие странного аттрактора. . . . .	39
2.2 Типы устойчивости траекторий . . . . .	42
2.3 Спектр ляпуновских характеристических показателей . . . . .	47
2.4 Сечение и отображение Пуанкаре . . . . .	56
2.5 Размерность аттракторов . . . . .	63
2.6 Спектральная плотность и инвариантная мера . . . . .	67
<b>3 Хаос в маятниковых системах</b>	<b>74</b>
3.1 Введение . . . . .	74
3.2 Плоский физический маятник . . . . .	77
3.2.1 Уравнения движения и устойчивость положений равно- весия . . . . .	77
3.2.2 Исследование хаотических режимов . . . . .	82



3.2.3	Карта динамических режимов . . . . .	112
3.3	Сферический маятник . . . . .	117
3.4	Выводы по главе . . . . .	141
<b>4</b>	<b>Влияние факторов запаздывания на динамику маятниковых систем</b>	<b>143</b>
4.1	Введение . . . . .	143
4.2	Влияние запаздывания на стабилизацию маятниковых систем при идеальном возбуждении . . . . .	146
4.2.1	Высокочастотное возбуждение . . . . .	146
4.2.2	Резонансный случай . . . . .	150
4.3	Высокочастотная стабилизация маятниковых систем при неидеальном возбуждении . . . . .	157
4.3.1	Горизонтальное возбуждение точки подвеса . . . . .	157
4.3.2	Вертикальное возбуждение точки подвеса . . . . .	166
4.4	Резонансное взаимодействие маятниковых систем с неидеальным источником энергии при наличии запаздывания воздействий	179
4.5	Выводы по главе . . . . .	189
<b>5</b>	<b>Детерминированный хаос в системе "генератор–пьезокерамический преобразователь (излучатель)"</b>	<b>192</b>
5.1	Введение . . . . .	192
5.2	Выбор математической модели . . . . .	193
5.3	Исследование установившихся режимов взаимодействия . . . . .	198
5.4	Влияние запаздывания на хаотизацию установившихся колебаний	224
5.5	Выводы по главе . . . . .	240
<b>6</b>	<b>Динамический хаос при ограниченном возбуждении колебаний цилиндрического бака с жидкостью</b>	<b>242</b>
6.1	Введение . . . . .	242
6.2	Хаос при вынужденном резонансе . . . . .	244

6.2.1	Математическая модель при ограниченном возбуждении	244
6.2.2	Хаотические и регулярные аттракторы при вынужденном резонансе . . . . .	253
6.3	Хаос при параметрическом резонансе . . . . .	284
6.3.1	Математическая модель для неидеального возбуждения .	284
6.3.2	Возникновение, развитие и исчезновение динамического хаоса . . . . .	288
6.4	Выводы по главе . . . . .	302
	<b>Выводы</b>	<b>304</b>
	<b>Список использованных источников</b>	<b>308</b>

# Введение

**Актуальность темы.** Одним из самых значительных научных открытий последних десятилетий является открытие детерминированного хаоса в динамических системах. Суть этого открытия состоит в том, что полностью определенная (детерминированная) динамическая система, при отсутствии каких-либо случайных воздействий на нее, начинает вести себя непредсказуемым (хаотическим) образом. Однако в этой непредсказуемости (хаотичности) при более тщательном рассмотрении удастся выявить ряд закономерностей в поведении системы, что отличает данное явление от классических случайных процессов. Более того, в отличие от классических случайных процессов, явление детерминированного хаоса может быть воспроизведено в натурных, лабораторных и численных экспериментах. Что самое существенное, детерминированный хаос не является каким-либо исключительным режимом поведения динамических систем, наоборот, такие режимы наблюдаются в очень многих динамических системах, рассматриваемых в математике, физике, химии, биологии и медицине. Такие детерминированные хаотические режимы зачастую являются более типичными режимами, чем полностью предсказуемые (регулярные) режимы. Можно сказать, что окружающий нас материальный мир "полностью погружен в хаос". Как выяснилось, явление детерминированного хаоса присуще не только материальному миру. В последнее время такие явления все чаще описываются в исследованиях по экономике, социологии, философии, истории. Поэтому исследования по хаотической динамике являются одним из магистральных путей развития современного естествознания. Такие исследования широко проводятся во всех промышленно развитых

странах мира.

Явления детерминированного хаоса возможны только в нелинейных системах. Поэтому с открытием детерминированного хаоса полностью развеялись ранее бытовавшие иллюзии о возможности сколь-нибудь адекватного описания реальных процессов при помощи линейных математических моделей. Взгляд на нелинейные системы как на некоторое "косметическое" улучшение линейных моделей безоговорочно уходит в прошлое.

Математическим образом детерминированного хаоса зачастую выступают, так называемые, странные аттракторы – сложнейшим образом устроенные предельные множества в фазовых пространствах динамических систем. На практике первый странный аттрактор был построен американским исследователем Э.Н.Лоренцем в 1963 году при изучении процессов теплообмена в воздушных течениях. Однако предпосылки существования хаотической динамики в детерминированных нелинейных системах можно обнаружить еще в работах великого А.Пуанкаре, который столкнулся со сложной динамикой в знаменитой задаче трех тел в небесной механике. В частности, он описал, так называемую, гомоклиническую траекторию такими словами: "Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел, в которой нет однозначного интеграла и ряды расходятся." Следует отметить, что анализ гомоклинических траекторий стал доступен специалистам лишь шестьдесят лет спустя после опубликования работ Пуанкаре. Сейчас установлено, что такие гомоклинические траектории являются одним из основных механизмов при образовании странного аттрактора.

В исследованиях 70-х годов прошлого века убедительно показано, что основной причиной образования странных аттракторов является экспоненциальная неустойчивость принадлежащих им траекторий. Поэтому особое значение приобрели введенные А.Ляпуновым в 1892 году характеристические показатели, которые теперь называются ляпуновскими. Сейчас установлено, что наличие у динамической системы хотя бы одного положительного ляпу-

новского показателя является практическим критерием хаоса.

Исследование сложной динамики детерминированных систем проводилось в работах Д.Биркгофа, А.А.Андропова, Э.Хопфа, Л.Д.Ландау, С.Улама, Н.Н.Боголюбова, Ю.А.Митропольского, Дж.Хейла, В.И.Арнольда, Ю.Мозера и многих других авторов. Здесь следует отметить работы А.М.Самойленко и его школы (Ю.В.Теплинский, В.Л.Кулик и др.) по исследованию тороидальных многообразий динамических систем.

После опубликования ставшей к настоящему времени классической работы Э.Н.Лоренца число публикаций по хаотической динамике начинает лавинообразно нарастать. Это направление становится одним из ведущих в современной теории динамических систем. Здесь следует выделить исследования В.С.Анищенко, В.И.Арнольда, Г.Бенеттина, Г.М.Заславского, Д.Йорка, Д.Каплана, А.П.Кузнецова, С.П.Кузнецова, П.Манневилля, В.М.Мелешко, В.К.Мельникова, Ю.И.Михлина, Ю.И.Неймарка, И.Помо, Д.Рюэля, Я.Г.Синая, С.Смейла, Ф.Такенса, М.Фейгенбаума, Л.Чуа, М.Эно, А.Н.Шарковского, Л.П.Шильникова и многих других. Несмотря на увеличение с каждым годом числа публикаций по детерминированному хаосу многие аспекты этой теории остаются невыясненными и требуют дальнейшего интенсивного изучения.

Вторым научным направлением, к которому принадлежит диссертационная работа, является теория систем с ограниченным возбуждением. Возникшая из экспериментов немецкого механика А.Зоммерфельда в начале двадцатого века, как установившееся научное направление, данная теория сформировалась с выходом в 1964 году монографии украинского ученого В.О.Кононенко, в которой была введена четкая аксиоматика и построены математические модели для широкого круга задач. Теория систем с ограниченным возбуждением исследует взаимодействие колебательных систем с источниками возбуждения их колебаний. В рамках этой теории предполагается, что источники возбуждения колебаний имеют мощность, сравнимую с мощностью, потребляемой колебательной нагрузкой. В таком случае функ-

ционирование источника энергии зависит от режима колебаний нагрузки и его воздействие нельзя выразить в виде явной функции времени заранее заданного вида. Тогда как при традиционном математическом моделировании колебательной системы рассматриваются идеализированные источники возбуждения неограниченной мощности. Во многих случаях "идеальный" подход является принципиально неверным, что на практике приводит к грубым ошибкам в описании динамики как колебательной системы, так и источника возбуждения. Еще более актуальным применение моделей ограниченного возбуждения становится в наше время, когда перед человечеством во весь рост становятся проблемы глобального энергосбережения, что заставляет максимально минимизировать мощности применяемых источников возбуждения.

За время прошедшее после выхода монографии В.Кононенко, в теории систем с ограниченным возбуждением получен целый ряд важных результатов, среди которых следует отметить работы К.В.Фролова, Р.Ф.Ганиева, Т.С.Краснопольской, М.Ф.Диментберга, А.А.Алифова, М.А.Павловского, Х.Балтазара, С. Де Соуза, Р.Бразил, А.Фенили. В настоящий момент теория систем с ограниченным возбуждением является интенсивно развивающимся научным направлением.

Открытие детерминированного хаоса стимулировало появление нового раздела в теории систем с ограниченным возбуждением, связанного с изучением хаотических режимов взаимодействия колебательных систем с источниками возбуждения колебаний. Причем, особый интерес вызывают хаотические режимы, возникновение которых связано с нелинейным взаимодействием между колебательной системой и источником возбуждения, а не с их автономными свойствами.

**Связь работы с научными программами, планами, темами.** Диссертационная работа выполнялась в соответствии с общим планом научной работы кафедры математической физики физико-математического факультета НТУУ "Киевский политехнический институт" и госбюджетной темы физико-математического факультета НТУУ "Киевский политехниче-

ский институт" (номер государственной регистрации 0104400417, код КВН-ГДІ.1.0.04.01). Тема диссертации утверждена Ученым Советом НТУУ "Киевский политехнический институт" (протокол №7 от 29 июня 2005 г.).

**Цель и задачи исследования.** *Целью исследования* является получение существенно новых результатов по хаотической динамике ряда детерминированных динамических систем с ограниченным возбуждением.

*Объектом исследования* являются системы дифференциальных уравнений, описывающие нелинейное взаимодействие маятниковых, электроупругих и гидродинамических систем с источниками возбуждения движений.

*Предметом исследования* являются регулярные и хаотические аттракторы вышеперечисленных динамических систем, их сечения и отображения Пуанкаре, фазопараметрические характеристики, спектры ляпуновских характеристических показателей, распределения спектральной плотности и естественной инвариантной меры, исследование сценариев перехода от регулярных движений к хаотическим, а также изучение влияния факторов запаздывания.

*Методы исследования.* В работе используются разные аналитические и численные методы. Для упрощения математических моделей, рассмотренных в работе динамических систем, и для исследования влияния запаздывания на стабилизацию маятниковых систем применяется метод усреднения.

При проведении исследований по хаотической динамике, рассмотренных в работе систем дифференциальных уравнений, применяются следующие численные методы и алгоритмы: метод Рунге–Кутты с переменным шагом, алгоритм Бенеттина, метод Эно, метод Файлона, компьютерный метод кодирования оттенками.

**Научная новизна полученных результатов.** В диссертационной работе получены следующие новые научные результаты.

Разработана методика и создан пакет прикладных программ для компьютерных исследований по хаотической динамике рассмотренных систем дифференциальных уравнений, благодаря которому получены результаты

работы, которые касаются динамического хаоса.

**Для маятниковых систем.** Применен новый подход, благодаря которому построены энергетически корректные математические модели некоторых маятниковых систем как в виде систем дифференциальных уравнений без отклонения аргумента, так и в виде систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, а также в виде систем дифференциальных уравнений нейтрального типа.

Обнаружено существование хаотических аттракторов у таких систем несмотря на то, что их существование в некоторых случаях ранее считалось невозможным. Подробно проанализировано влияние параметров маятника и источника возбуждения его колебаний (электродвигателя) на возникновение, развитие и исчезновение детерминированного хаоса. Описаны сценарии перехода от регулярных колебаний к хаотическим и наоборот. Получены фазопараметрические характеристики и спектры ляпуновских характеристических показателей систем. Построены и детально проанализированы фазовые портреты, сечения и отображения Пуанкаре, распределения естественной инвариантной меры и распределения спектральной плотности хаотических аттракторов.

Исследовано влияние различных факторов запаздывания на устойчивость положений равновесия маятников в идеальном и неидеальном случаях. Показано, что наличие запаздывания приводит к существенному увеличению количества установившихся режимов взаимодействия между маятником и электродвигателем. Установлено, что запаздывание может играть роль своеобразного энергетического регулятора, приводящего к появлению необычных установившихся режимов взаимодействия, при которых скорость вращения вала двигателя достигает значений превышающих скорость вращения вала без колебательной нагрузки. Доказано, что в некоторых областях в пространстве параметров рассмотренных систем запаздывание, фактически, играет роль управляющего воздействия при стабилизации (дестабилизации) колебаний маятника.



**Для систем "генератор–пьезокерамический излучатель"**. Применение и исследование новой математической модели, описывающей процесс взаимодействия колебательных режимов пьезокерамического излучателя и задающего электрогенератора, позволило установить, что рассмотренная задача обладает исключительным разнообразием установившихся режимов как регулярных, так и хаотических. По сути рассмотренной динамической системе присуще значительное число эффектов характерных для задач нелинейной динамики в целом. Все далее перечисленные эффекты установлены впервые.

Изучено влияние изменения параметров генератора на возникновение установившихся режимов колебаний системы. В данной детерминированной системе было обнаружено несколько типов хаотических аттракторов, в том числе и два типа гиперхаотических. Установлены и объяснены заметные отличия в фазовых портретах, сечениях и отображениях Пуанкаре, распределениях инвариантной меры и спектральной плотности у существующих в системе хаотических аттракторов. Показано, что системе присущи многие из встречающихся в нелинейной динамике сценариев перехода от регулярных движений к хаотическим. Обнаружены переходы "порядок–хаос" по сценарию Фейгенбаума, через перемежаемость первого типа по Помо–Манневиллю, жесткие переходы к хаосу.

Для изучения влияния различных факторов запаздывания построена математическая модель системы в виде системы дифференциальных уравнений с отклонением аргумента. Показано, что факторы запаздывания существенно влияют на динамику системы. При изменениях значений запаздывания в системе наблюдается большое разнообразие изменений типа установившихся режимов вида "хаос–порядок" или "порядок–хаос–порядок–хаос".

Установлено, что существование детерминированного хаоса в системе объясняется, главным образом, взаимодействием между подсистемами (генератором и излучателем), а не автономными свойствами каждой из подсистем в отдельности.

**Для систем "бак с жидкостью–электродвигатель".** Применение энергетически корректных принципов математического моделирования нелинейных процессов взаимодействия между баком, заполненным жидкостью, и электродвигателем ограниченной мощности позволило:

1. Изучить влияние изменения параметров бака, жидкости и источника возбуждения колебаний (электродвигателя) на возникновение, развитие и исчезновение детерминированного хаоса в системе

2. Установить существование нескольких типов хаотических аттракторов исследуемых детерминированных динамических систем типа "бак с жидкостью–электродвигатель", в том числе так называемых одномодовых и двумодовых аттракторов.

3. Обнаружить и описать новый сценарий перехода к хаосу, который обобщает классический сценарий Помо–Манневилля.

4. Построить и тщательно проанализировать основные характеристики, а именно, ляпуновские характеристические показатели, фазовые портреты, сечения и отображения Пуанкаре, распределения естественной инвариантной меры, распределения спектральной плотности хаотических аттракторов системы.

5. Обнаружить существование хаотических аттракторов в случае параметрического резонанса в системе, что ранее считалось невозможным.

6. Показать, что переход к хаосу может происходить по различным сценариям, таким как: каскад бифуркаций удвоения периода (сценарий Фейгенбаума), перемежаемость (классическая и обобщенная), жесткий переход.

7. Выделить случаи, в которых хаотическая динамика полученной системы дифференциальных уравнений пятого порядка может быть аппроксимирована при помощи одномерного дискретного отображения.

8. Локализовать области в фазовом пространстве, в которых хаотический аттрактор является единственным аттрактором соответствующей системы дифференциальных уравнений.

**Практическое значение полученных результатов.** Диссертация

имеет теоретический характер. Существенная часть результатов диссертации используется при чтении спецкурсов "Теория динамических систем" и "Хаос в динамических системах", которые преподаются на физико-математическом факультете НТУУ "Киевский политехнический институт", а также при выполнении студентами дипломных работ образовательных квалификационных уровней "магистр" и "специалист". Эти результаты могут быть использованы и при чтении спецкурсов по детерминированному хаосу на механико-математических, физических, радиофизических факультетах других университетов.

Результаты диссертации могут найти применение в рамках исследований по хаотической динамике, проводящихся в математике, механике, гидро- и электродинамике, физике, экономике, биологии и т.д.

**Личный вклад соискателя.** Из опубликованных по теме диссертации, в специальных научных изданиях, 28 работ 18 работ написаны в соавторстве с Т.С.Краснопольской. В монографии [60] автором, вместе с Т.С.Краснопольскою, написан раздел 5. В этом разделе автору принадлежит разработка методики и программ проведения компьютерных вычислений, нахождение областей хаотической динамики, рассмотренных динамических систем, а также классификация типов хаотических и регулярных аттракторов. Т.С.Краснопольской принадлежит построение математических моделей и исследование солитонов. В работах [44]–[47] автору принадлежит главная идея исследования влияния разных факторов запаздывания на динамику маятниковых систем. Также ему принадлежит построение всех математических моделей, обоснование примененных методов исследования и получение условий асимптотической устойчивости стационарных режимов. Им проведен тщательный анализ влияния разнообразных факторов запаздывания на существование и устойчивость полученных стационарных режимов колебаний. Т.С.Краснопольская принимала участие в выводе некоторых уравнений движения и в общем обсуждении результатов.

В работах [49], [54], [179] автору принадлежит построение матема-

тических моделей, разработка методики и компьютерных программ исследования хаоса, локализация в пространстве параметров областей хаотизации и классификация типов регулярных и хаотических аттракторов. Т.С.Краснопольская принимала участие в построении некоторых уравнений движения и общем обсуждении результатов.

В работах [51], [53], [55]–[57], [118], [119], [181], [182], [185] автору принадлежит разработка методики исследований по регулярной и хаотической динамике, создание оригинального пакета программ для проведения компьютерных экспериментов, получение условий асимптотической устойчивости положений равновесия, нахождение областей существования детерминированного хаоса, классификация типов аттракторов, исследование сечений и отображений Пуанкаре, распределений инвариантной меры и спектральной плотности. Т.С.Краснопольской принадлежит построение большинства математических моделей в упомянутых, в этом абзаце, работах.

Из опубликованных работ, написанных в соавторстве, на защиту выносятся только результаты полученные автором самостоятельно.

**Апробация результатов диссертации** Основные результаты диссертации докладывались на многих представительных международных научных форумах, в частности:

- на международных съездах: 8–th World Congress on the Theory Machines and Mechanisms (Prague, 1991); Українському математичному конгресі (Київ, 2001); IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006);

- на международных (всесоюзных) конференциях: International Conference of Nonlinear Oscillations "ICNO-XI" (Budapest, 1987); Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики (Тернополь, 1989); Нелинейные колебания механических систем (Горький, 1990); 1-st European Fluid Mechanics Conference (Cambridge, 1991); "CHAOS-IV" American–Russian–Ukrainian Conference on Chaos (Kiev, 1992); Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики – Вто-

рые боголюбовские чтения (Киев, 1992); Sixth International Conference on Flow-Induced Vibration (London, 1995); International Conference Nonlinear Differential Equations (Kiev, 1995); Dynamical Systems Modelling And Stability Investigation (Kiev, 1999, 2003, 2005, 2007); VII Международная конференция "Устойчивость, управление и динамика твердого тела" (Донецк, 1999); Симпозіум "Консонанс-2005" (Київ, 2005); XI Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 2006); IUTAM Symposium on Hamilton Dynamics, Vortex Structures, Turbulence (Moscow, 2006); Lyapunov Memorial Conference (Kharkiv, 2007); Международная конференция "Анализ и особенности", посвященная 70-летию В.И.Арнольда (Москва, 2007);

– на международных семинарах, школах: International Colloquium Euromech (Lisboa, 1991); Крымская Международная школа "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Симферополь, 2002, 2004 и 2006).

– на украинских семинарах: неоднократно на семинаре кафедры математической физики физико-математического факультета Национального технического университета Украины "Киевский политехнический институт" (руководитель – профессор С.Д.Ивасишен), семинаре кафедры дифференциальных и интегральных уравнений механико-математического факультета Национального университета им. Т.Г. Шевченко (руководитель – член-корреспондент НАН Украины Н.А.Перестюк), семинаре "Математические проблемы механики и вычислительная математика" Института математики НАН Украины (руководители – академик НАН Украины И.А.Луковский и член-корреспондент НАН Украины В.Л.Макаров), семинаре отделов теории динамических систем и топологии Института математики НАН Украины (руководители – академик НАН Украины А.Н.Шарковский и член-корреспондент НАН Украины В.В.Шарко).

**Публикации.** Результаты диссертационной работы опубликованы в 1 монографии [60] и 27 статьях [44]–[47], [49], [51], [53]–[57], [107]–[110], [112], [114], [118]–[123], [179], [181], [182], [185] в украинских и зарубежных научных специальных изданиях, а также в 25 тезисах и трудах международных науч-

ных конференций и съездов [48], [50], [52], [58], [111], [113], [115]–[117], [124], [176]–[178], [180], [183], [184], [222]–[230].

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, выводов и библиографии, которая включает 241 наименование. Полный объем работы составляет 334 страницы.

# Глава 1

## Обзор литературы

### 1.1 Детерминированный хаос.

В начале 60-х годов XX столетия американский исследователь Э.Н.Лоренц проводил интенсивные численные эксперименты по предсказанию погоды, основанные на сравнительно простой модели системы семи обыкновенных дифференциальных уравнений. Опубликованная в 1963 году пионерская работа [189] содержала то, что позднее получило название "детерминированного хаоса" – кажущееся случайным и непредсказуемым поведение системы во времени, которое тем не менее подчиняется точным и четко выраженным правилам. Однако примеры очень сложной динамики детерминированных динамических систем часто встречались задолго до Э.Н.Лоренца.

В радиофизике со сложной динамикой впервые столкнулся в 1927 году голландский физик Б.ван дер Поль при изучении периодических колебаний электроламповых генераторов. В период с 1922 по 1949 год он был директором физической лаборатории (NatLab) фирмы Philips в Эйндховене. При проведении экспериментальных исследований таких генераторов он, вместе со своим коллегой ван дер Марком, контролировал работу устройства по звуку в наушниках. Были отмечены шумоподобные колебания при переходах между областями периодических автоколебаний. По всей видимости, это было первое экспериментальное наблюдение детерминированного хаоса [17, 239].

Исследования Б.ван дер Поля показали недостаточность примене-

ния линейных моделей в радиотехнике и послужили отправной точкой к созданию нового междисциплинарного научного направления – теории нелинейных колебаний. Здесь особо следует отметить заслуги русских ученых Л.И.Мандельштама, Н.Д.Папалекси и А.А.Андропова. В 1937 году А.А.Андронов, А.А.Витт и С.Э.Хайкин опубликовали монографию "Теория колебаний"[2], замечательное предисловие к которой написал Л.И.Мандельштам, так сказать "манифест нелинейной теории колебаний". В этой классической монографии авторы применили и развили методы А.Пуанкаре и А.М.Ляпунова для исследования сложных колебаний многих прикладных динамических систем. Огромная заслуга А.А.Андропова состоит в том, что он практически первым показал применимость абстрактного математического аппарата качественной теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости для решения конкретных инженерных задач.

Статья [239] повлияла и на исследования М.Картрайта и Д.Литтлвуда [142], которыми в 1945 году при исследовании автогенератора при внешнем периодическом воздействии была обнаружена исключительная сложность динамики. В фазовом пространстве исследуемой системы авторами было обнаружено бесконечное число неустойчивых периодических траекторий.

Сложная динамика систем задолго до появления понятия "детерминированный хаос" наблюдалась в гидродинамике при исследованиях проблем турбулентности. Первой работой в этом направлении была экспериментальная работа О.Рейнольдса, которую он опубликовал 1883 году в виде обширного мемуара [215]. В этом мемуаре, на основе огромного числа экспериментов по исследованию течения жидкости в круглой трубке, установлено, что в зависимости от значения некоторого безразмерного параметра, ныне называемого числом Рейнольдса, движение жидкости в трубке может быть как ламинарным, так и турбулентным. Однако причина возникновения турбулентности оставалась невыясненной. С тех пор предпринимались и предпринимаются, многочисленные попытки объяснить природу турбулентности.

Одна из таких попыток связана с именем Л.Д.Ландау. В 1944 году была



опубликована его работа [63]. В этой работе Л.Д.Ландау выдвинул гипотезу, что причиной возникновения турбулентности является каскад большого числа бифуркаций, каждая из которых состоит в появлении колебаний с новой частотой. Схожие представления о природе турбулентности развивал позже Э.Хопф [169]. Поэтому данная гипотеза получила название сценария Ландау–Хопфа. Необходимо подчеркнуть, что работы Л.Д.Ландау и Э.Хопфа базировались на понятийном и методологическом аппарате, сформированном к тому времени в теории колебаний. В частности, появлению работы Э.Хопфа способствовало его тесное сотрудничество с А.А.Андроновым.

В механике первой задачей, в которой возможна сложная динамика и хаос, является знаменитая задача трех тел небесной механики. Мы уже говорили об исследованиях этой задачи А.Пуанкаре во Введении. Упомянем еще работу 1964 года [166], в которой рассмотрена модель движения звезды через галактический диск. Эта работа является одним из первых примеров исследования сложной динамики при помощи компьютеров.

В 50–60-х годах прошлого века была создана так называемая теория КАМ, получившая свое наименование от первых литер фамилий русских математиков А.М.Колмогорова и В.И.Арнольда, а также американского математика Ю.Мозера. Эта теория внесла значительный вклад в понимание взаимосвязи между квазипериодической динамикой и хаосом. Основная теорема теории КАМ утверждает, что при включении достаточно слабого взаимодействия между движениями нелинейных систем с иррациональным соотношением частот квазипериодический характер динамики сохраняется в большинстве случаев.

Существенное значение в понимание сложной динамики поведения динамических систем на тороидальных многообразиях и, в частности, структуры траекторий на этих многообразиях внесли работы украинского математика А.М.Самойленко и [85], [88]–[92] и его научной школы, в частности, Ю.В.Теплинского [93], [94], [220].

В теории дискретных отображений вплотную к пониманию детермини-

рованного хаоса подошли американские математики С.Улам и Дж. фон Нейман в своей работе 1947 года [237]. В этой работе, посвященной исследованию логистического отображения, исследователи установили, что при некотором значении параметра отображения оно, с помощью замены переменных, сводится к отображению типа "зуб пилы", которое допускает тривиальный анализ. Было установлено, что выбором начальной точки  $x$  можно реализовать любую наперед заданную последовательность знаков величины  $x - x_{max}$ .

Очень важное значение в теории дискретных динамических систем, а впоследствии в хаотической динамике сыграла работа 1964 года украинского математика А.Н.Шарковского [104]. Основной результат этой работы состоит в том, что если непрерывное отображение одномерного интервала в себя имеет цикл периода  $m$ , то оно имеет также и циклы со всевозможными периодами  $m'$ , предшествующим числу  $m$  в перечне всех целых чисел, выписанных в определенном порядке, который сейчас называется порядком Шарковского. Доказанная в работе [104] теорема послужила отправной точкой для исследований десятков авторов [221]. Такие исследования по сей день остаются актуальными.

Несмотря на все успехи исследователей предшествующих лет, все же точкой отсчета "хаотической эры" в нелинейной динамике следует считать 1963 год, год опубликования знаменитой работы Э.Н.Лоренца [189]. В этой работе приводились и обсуждались результаты компьютерного численного интегрирования системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующей динамику жидкости при конвекции в подогреваемом снизу слое. Э.Н.Лоренцем было построено сложное непериодическое притягивающее предельное множество, которое существовало у сравнительно простой трехмерной динамической системы. Причем это множество состояло из неустойчивых по Ляпунову траекторий и не принадлежало ни к одному из ранее классифицируемых типов аттракторов. Обнаруженные им необычные свойства Лоренц пропагандировал в дальнейшем как "эффект бабочки", что в применении к метеорологии означало, что небольшой взмах крыльев бабочки в Бразилии

может повлечь возникновение торнадо в Техасе. Построенное Лоренцем новое необычное предельное множество сейчас называется аттрактором Лоренца. Справедливости ради следует отметить, что эта работа, опубликованная в метеорологическом журнале практически не была замечена математическим сообществом. Метеорологи, практически, ничего не поняли в ней, а математики и физики просто не знали о ее существовании.

Ситуация резко изменилась с началом 70-х годов прошлого века, когда число публикаций по детерминированному хаосу стало лавинообразно нарастать, а сама хаотическая динамика, ввиду своей универсальной междисциплинарности, стала одним из магистральных путей современной науки. Ввиду органиченности места отметим только наиболее важные публикации прилегающие к исследованиям, проводимым в диссертационной работе. Прежде всего отметим работу 1971 года Д.Рюэля и Ф.Такенса [219], посвященную исследованиям природы турбулентности. Именно в этой работе впервые был введен термин "странный аттрактор" сразу подхваченный всеми остальными исследователями.

Странные аттракторы существуют только в нелинейных математических моделях, которые, в подавляющем большинстве случаев, не допускают точных аналитических решений. Поэтому сразу же приобрела огромное значение разработка численных методов и методик исследования детерминированного хаоса, в том числе расчет различных количественных характеристик хаоса. Одной из первых количественных мер хаоса стали спектры ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) аттрактора. Напомним, что понятие характеристического показателя было введено еще А.Ляпуновым [30]. Однако только после знаменитой мультипликативной эргодической теоремы В.И.Оселедца [76], стало возможным приписывать спектр ЛХП наугад взятой траектории аттрактора всему аттрактору в целом. Чрезвычайно удобный алгоритм подсчета спектра ЛХП был предложен Д.Бенеттином, Л.Гальяни и др. в работах [137, 138, 139]. Сравнительная простота и удобство в компьютерной реализации этого алгоритма привели к тому, что в прикладных задачах

детерминированного хаоса спектры ЛХП стали использоваться в качестве основного критерия хаотичности, а также послужили основой для определения ряда других количественных характеристик хаоса, о которых более подробно мы будем говорить в следующей главе.

Очень важной качественной и количественной характеристикой странного аттрактора являются сечения и отображения Пуанкаре, позволяющие идентифицировать исследуемый аттрактор как странный (хаотический). Удобный численный метод для построения сечений и отображений Пуанкаре был предложен М.Эно в работе [167]. Более детально этот метод будет обсуждаться в следующей главе.

Большое значение в теории детерминированного хаоса играют хаотические аттракторы Ресслера, получившие свое название по фамилии немецкого исследователя О.Ресслера, впервые построившего их в работах [217, 218]. Основной целью О.Ресслера было искусственное конструирование как можно более простой детерминированной системы дифференциальных уравнений, демонстрирующей хаотическое поведение. Хотя системы уравнений и были сконструированы Ресслером искусственно, существующие у этих уравнений аттракторы с характерной ленточной структурой ныне обнаружены в десятках прикладных задач хаотической динамики.

Теперь остановимся на важном вопросе перехода от регулярных движений к хаотическим. Этот переход представляет собой некоторую последовательность бифуркаций, которая может быть как конечной, так и бесконечной. Об этой последовательности принято говорить как о сценарии перехода к хаосу. Отметим несколько важнейших сценариев перехода к хаосу.

В первую очередь отметим сценарий перехода к хаосу через каскад (бесконечную последовательность) бифуркаций удвоения периодов предельных циклов. Такие бифуркации циклов изучались многими исследователями динамических систем в "дохаотическую" эру, однако только благодаря работам американского физика М.Фейгенбаума пришло осознание того факта, что это один из основных путей возникновения хаоса. Теперь этот сценарий спра-

ведливо называется сценарием Фейгенбаума. Он описан М.Фейгенбаумом в серии работ 1976–1979 гг. [97], [151]– [153]. В этих работах Фейгенбаум не только описал сценарий перехода к хаосу, но и выявил присущие такому сценарию удивительные свойства универсальности и скейлинга (масштабного подобия). Как оказалось, существует большое множество диссипативных динамических систем самой разнообразной природы, которые не только демонстрируют переход к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций удвоения, но и выявляют у порога хаоса одни и те же количественные закономерности масштабного подобия такого перехода. Фейгенбаумом был подсчитан ряд таких констант, которые ныне носят его имя. Сейчас установлены такие константы для нескольких классов универсальности. Здесь необходимо отметить работы А.П.Кузнецова, С.П.Кузнецова и др. [187, 188].

Вторым основным сценарием перехода к хаосу в динамических системах является перемежаемость. Такое название вошло в обиход в 80-х годах прошлого века, после публикации серии работ французских исследователей И.Помо и П.Манневилля [140, 190, 191, 211]. И.Помо и П.Манневилль описали несколько возможных типов таких переходов к хаосу. Отличительной особенностью этих сценариев является переход к хаосу в результате только одной бифуркации. В структуре возникающего хаотического аттрактора четко выделяются две фазы — сравнительно длительные ламинарные фазы, которые "перемежаются" короткими непредсказуемыми турбулентными всплесками. Для некоторых типов перемежаемости удастся развить анализ, аналогичный проведенному Фейгенбаумом для каскада бифуркаций удвоения.

К настоящему времени установлен еще ряд сценариев перехода к хаосу в динамических системах — это сценарий Айфрамовича–Шильникова, бифуркация Неймарка, жесткие переходы типа "хаос—хаос". Однако первые два сценария (сценарий Фейгенбаума и перемежаемость) наиболее часто встречаются в практических прикладных задачах хаотической динамики. Следует отметить, что картина возможных переходов от регулярного аттрактора к хаотическому еще очень далека от своего завершения.

Вкратце остановимся на некоторых странных аттракторах построенных для динамических систем, которые являются математическими моделями реальных физических устройств, в первую очередь различных электронных генераторов. Здесь следует упомянуть работы А.С.Пиковского и М.И.Рабиновича [78], С.В.Кияшко и др. [33], В.С.Анищенко и др. [3, 4], А.С.Дмитриева и В.Я.Кислова [27], Л.Чуа [143]. В этих работах предложены разные типы генераторов, в которых наблюдается хаотическая динамика, в частности, реализуются аттракторы Ресслера и Лоренца. Все генераторы достаточно просты конструктивно и позволяют наблюдать хаотические эффекты прямо на экране осциллографа. Более того, простым поворотом ручек настройки можно детально наблюдать на осциллографе сценарии перехода от регулярных колебаний к хаотическим.

Хаос в гидроупругих системах впервые был исследован в работах [144, 145, 158, 159, 170, 192, 202, 206, 238]. При этом были использованы маломерные модели распределенных систем – континуума жидкости на основе метода Бубнова-Галеркина. Без использования такого подхода, однако исходя из лагранжевого подхода описания динамики в известном континуальном эйлеровом течении, переворот в гидромеханике произвели работы американского ученого Х. Арефа [128, 129, 130], который в 1982 году ввел термин и описал парадигму хаотической адвекции. Суть его открытия заключается в том, что в известном двумерном эйлеровом поле течения, которое описывается гладкой непрерывной функцией тока  $\Psi(x, y, t)$ , траектории отдельных безинерционных (пассивных) лагранжевых частиц могут иметь столь сложный и запутанный вид, что их (зная "простое" эйлерово поле течения) заранее описать и предсказать принципиально невозможно, другими словами, они являются хаотическими.

Парадигма хаотической адвекции является сегодня одним из самых перспективных и успешных подходов при изучении и объяснении ряда проблем в задачах перемешивания жидкостей, переноса в геофизических течениях, движения объемов лавы в мантии Земли, сложной циркуляции загрязнений

в атмосфере и т. д. [131]. Первые работы по теории хаотической адвекции в Украине появились, начиная с 90-х годов прошлого столетия, в работах В.Мелешко и его учеников [24, 193, 194, 195]. Подробно хаос в динамике вихревых структур был описан в монографии [69].

В теоретической механике хаотическая динамика систем с несколькими положениями равновесия исследовалась в работах Ю.В.Михлина и его учеников [66], [196]– [198].

Хаотическое поведение при вращениях твердого тела исследовалось А.Борисовым и его учениками [14]. Этими же авторами изучалась хаотическая динамика точечных вихрей [15].

В заключение данного параграфа отметим, что теория детерминированного хаоса, несмотря на большое число полученных фундаментальных результатов, все еще находится на начальном этапе своего развития. Многие вопросы остаются невыясненными и требуют дальнейших интенсивных исследований.

## 1.2 Теория систем с ограниченным возбуждением.

Теория колебательных систем с ограниченным возбуждением сформировалась как самостоятельное научное направление с определенной аксиоматикой после выхода в 1964 году книги украинского ученого Виктора Олимпановича Кононенко [37]. В этой книге было введено понятие колебательной системы с ограниченным возбуждением, даны основные определения взаимодействий с источниками возбуждения, сформулирована методология решения задач взаимодействия, а также решен целый ряд прикладных задач.

Однако первые работы, заложившие основы нового научного направления, были опубликованы в самом начале прошлого века известным немецким физиком Арнольдом Зоммерфельдом [231, 232]. В экспериментальных работах [231, 232] исследовано влияние фундаментов на управляемость работы электродвигателей установленных на этих фундаментах. Цель экспериментов

состояла в определении условий прохождения маломощными электродвигателями резонансных зон колебаний фундаментов.

Наиболее простым в лабораторной реализации фундаментом являлся обычный сосновый стол на четырех ножках, которые крепились плотно к полу. Теоретически функционирование электродвигателя должно было быть простым в использовании: при увеличении величины тока в цепи двигателя, увеличивается напряжение и мощность, и, как результат, должна увеличиваться скорость вращения вала двигателя. На многих скоростных интервалах так все и обстояло, кроме тех некоторых интервалов значений, при которых наблюдался необычный эффект. В этих интервалах скорость вращения вала двигателя как бы замирала, оставаясь постоянной, несмотря на медленное увеличение как тока, так и напряжения. Затем, когда напряжение достигало значения, гипотетически соответствовавшего бы скорости вращения на несколько сотен оборотов в минуту больше, скорость скачком увеличивалась до необходимого значения. Таким образом, на некоторых интервалах изменения скорости электродвигателя его мощность падала почти в три раза по сравнению с теоретически ожидаемой. В своих статьях А. Зоммерфельд установил причину столь необычного поведения электродвигателя. Он правильно сделал вывод, что двигатель потерял  $2/3$  своей мощности на поддержании резонансных колебаний ножек стола. Зоммерфельд описал также возможность резкого увеличения угловой скорости двигателя путем принудительного прекращения резонансных колебаний.

Выдающийся украинский механик Степан Прокофьевич Тимошенко повторил опыт А. Зоммерфельда, используя маленький электромотор, укрепленный на гибкой стальной балке на двух опорах. Он же (1928 г.) впервые назвал неожиданные явления взаимодействия функционирования двигателя и колебательной системы фундамента эффектом Зоммерфельда [235].

Среди дальнейших публикаций по объяснению эффекта Зоммерфельда необходимо отметить экспериментальные работы А. К. Калищука [29], В. С. Мартышкина [67] и, в особенности, книгу И. Рокара [216], который пер-



вым аналитически рассмотрел совместную систему: линейную колебательную систему с источником возбуждения – электродвигателем. В этой работе впервые было установлено существование областей неустойчивости установившихся режимов взаимодействия. И хотя аналитические выкладки имели погрешность из-за неправильного знака в одном из уравнений (см. [77]), работа И. Рокара, безусловно, внесла положительный вклад в объяснение эффекта Зоммерфельда.

Правильные уравнения впервые были получены И.И. Блехманом, который в 1953 году опубликовал работу [11], посвященную самосинхронизации вибраторов. В этой довольно большой работе рассмотрен целый ряд задач синхронизации вибромашин, идеализировано представленных электромоторами с неуравновешенными вращающимися массами. По сути задача синхронизации вибромашин является задачей взаимодействия вибромашин и колебаний фундамента. А значит, в случае рассмотрения одного электромотора она может служить аналогом задачи, поставленной А. Зоммерфельдом. И. И. Блехман не только правильно вывел определяющие уравнения процесса взаимодействия вращения валов электродвигателей (с эксцентрично укрепленными массами) и колебаний фундамента, но также нашел решение для случаев резонансного и нерезонансного взаимодействия и, что очень важно, получил условия их устойчивости. В работе [11] впервые получено правильное аналитическое соотношение мощностей, позволяющее объяснить эффект Зоммерфельда.

Дальнейшее развитие теории систем с ограниченным возбуждением неразрывно связано с именем В.О. Кононенко, который взглянул на эффект Зоммерфельда несколько с иной стороны, с точки зрения неустойчивости и нереализуемости колебаний различных механических систем в некоторых частотных диапазонах. В. О. Кононенко поставил своей целью исследование свойств колебательных систем, когда они находятся под возбуждением устройств, имеющих сравнительно малую мощность. Он назвал такие колебательные системы системами с ограниченным возбуждением, а сам меха-

низм возбуждения (электродвигатель) – неидеальным источником энергии. В серии работ В. О. Кононенко [35, 37, 36] была построена последовательная теория взаимодействия колебательных систем различного рода (линейных, нелинейных, параметрических, автоколебательных) с источниками энергии. В этой теории задача о взаимодействии источника возбуждения с механической колебательной системой состоит в определении координат, описывающих функционирование устройства (источника возбуждения), создающего переменные во времени механические силы, в определении этих сил и описании вызываемых ими колебаний механической системы.

В настоящее время под эффектом Зоммерфельда-Кононенко понимается не только совокупность динамических эффектов при взаимодействии электродвигателей и колебательной системы, а более общие явления при взаимодействии любого вида возбудителя колебаний и разной природы колебательных систем, когда выходная мощность возбудителя является величиной, сравнимой с мощностью, потребляемой колебательными системами при резонансных колебаниях. В. О. Кононенко ввел удобную терминологию: идеальным источником энергии называется такой возбудитель, который функционирует независимо, то есть не испытывая обратного воздействия со стороны колебательной системы (на самом деле это воздействие пренебрежимо мало, или существуют дополнительные корректирующие устройства, компенсирующие это воздействие). Идеальный источник воздействует на систему по заранее известному закону, скажем, гармоническому с заранее заданной амплитудой и частотой. Неидеальным источником называется такой, который функционирует, завися от обратного воздействия со стороны колебательной нагрузки, когда его мощность сравнима с мощностью, потребляемой нагрузкой. В этом случае источник, или возбудитель, считается ограниченной мощности, а колебательная система – под ограниченным возбуждением. Поскольку функционирование неидеального источника энергии зависит от режима колебаний нагрузки (резонансный или нерезонансный), то его воздействие нельзя выразить в виде явной функции времени заранее заданного вида.

За время, истекшее после опубликования основополагающей книги В. О. Кононенко [37] и первой аналитически-корректной работы И. И. Блехмана [11] научное направление колебательные системы с ограниченным возбуждением получило широкое развитие. Отметим наиболее существенные публикации в этом направлении. Так среди работ, в которых изучалось взаимодействие колебательных систем с неидеальными источниками энергии различной физической природы, можно выделить работы Л. Пуста [81, 23], в которых механизмом возбуждения ограниченной мощности является электромеханический возбудитель, то есть неуравновешенный ротор или кривошипный механизм с пружиной, приводимые в движение электродвигателем. Гидравлический механизм или гидровозбудитель, в котором силы создаются переменным давлением в гидросреде, которое движет поршнем, рассмотрены в работах [21, 1]. Двигатели внутреннего сгорания, широко используемые в технике как механизмы ограниченной мощности, изучены достаточно подробно и хорошо в серии работ В. Л. Вейца и А. Е. Кочуры [18].

Большое количество работ опубликовано по исследованию различных типов колебаний при ограниченном возбуждении: вынужденных, параметрических, автоколебаний, виброударных, со случайно изменяющейся частотой, с учетом запаздывания импульса воздействия от неидеальных источников энергии. Прежде всего, это работы учеников и коллег В. О. Кононенко, а именно работы К. В. Фролова [99], С. С. Кораблева [36], Р. Ф. Ганиева [20], М. Ф. Диментберга [26], К. В. Фролова и А. А. Алифова [1], М. А. Павловского [39], Н. П. Плахтиенко [79], Т. С. Краснопольской [38], а также – работы ряда бразильских и американских исследователей [133, 134, 146, 154, 155].

Книга А. А. Алифова и К. В. Фролова "Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии" [1] дает подробный анализ динамики автоколебательных систем, взаимодействующих с источниками энергии, при наличии нелинейных упругих связей, периодических, параметрических взаимодействий и запаздывания. Результаты, полученные авторами, показывают, насколько важны выбор адекватной математической модели ре-

ального физического объекта, установление внутренней связи между его отдельными элементами, глубокое и всестороннее исследование особенностей объекта в зависимости от его параметров. Важность выбора объясняется тем фактом, что одна и та же система может проявлять в зависимости от значений параметров и окружающих ее условий различные свойства.

Интересные результаты были получены М. Ф. Диментбергом и К. В. Фроловым [26], М. Ф. Диментбергом и др. [147] при исследовании эффекта Зоммерфельда-Кононенко в системе со случайно изменяющимися параметрами. Было показано, что при случайном изменении собственной частоты возможен переход через резонанс без эффекта Зоммерфельда-Кононенко, при этом амплитуды колебаний, а значит и потребление энергии – значительные по величине. Эффект Зоммерфельда-Кононенко при учете свойств запаздывания различного рода исследовался также в работах [44, 46, 45, 47, 109].

Принципиально новый класс установившихся режимов взаимодействия представляют хаотические режимы, которые в задачах теории колебательных систем с ограниченным возбуждением впервые были обнаружены в 1989 году и опубликованы в работах [48, 49, 51, 176]. В последнее время опубликовано большое число научных работ по специфике хаотических режимов в системах с неидеальным возбуждением [147, 233, 133, 134, 136, 155, 234, 146, 154, 240, 236, 156], что свидетельствует об актуальности и интересе к задачам теории колебательных систем с ограниченным возбуждением.

В заключение хотелось бы указать на одно важное применение задач теории колебательных систем с ограниченным возбуждением. К ним приводят задачи о движении ракет с малой асимметрией свойств [210, 135, 212, 209] при движении их через слои атмосферы. При рассмотрении задачи о движении тел, опускающихся на Землю [209], Найфэ и Сэрик моделировали их колебания уравнениями с медленно изменяющимися параметрами. В этом случае периодическое возбуждение колебаний также имеет частоту, которая не является заранее заданной величиной, а меняется во времени, причем ее величина зависит от колебаний объекта [207, 208]. Таким образом получаем

задачу типичную для теории колебательных систем с ограниченным возбуждением, поскольку возбуждение зависит от колебаний и наоборот.

## Глава 2

# Описание основных методов исследования

### 2.1 Основные понятия и определения

#### 2.1.1 Понятие про динамическую систему

Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан оператор, который описывает эволюцию начального состояния во времени. Исторически понятие динамической системы возникло как обобщение системы механической природы, однако при вышеприведенном определении большинство систем материального и не только материального мира подпадает под понятие "динамическая система". Динамические системы могут иметь механическую, физическую, химическую, биологическую, финансовую и социальную природу. Они существуют в вычислительных процессах и процессах обработки и преобразования информации, которые осуществляются в соответствии с конкретными алгоритмами. Наконец, динамической системой является процесс развития человеческого общества в целом.

Описание динамических систем, в смысле задания оператора эволюции, также допускает чрезвычайно большое разнообразие. Такое описание может быть проведено при помощи дифференциальных уравнений, дискрет-

ных отображений, интегральных и интегро–дифференциальных уравнений, теории графов, теории марковских цепей и.т.д.

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены координаты системы, которые позволяют определить ее состояние, и указан эволюционный оператор, который позволяет решать задачу изменения состояния системы во времени. Заметим, что одной и той же динамической системе, в зависимости от степени приближения, могут быть поставлены в соответствие разные математические модели. Например, при изучении колебаний маятника, в зависимости от степени учета различных факторов, мы получим разные математические модели, которые описывают качественно отличные динамические процессы (колебания маятника с учетом и без учета трения). Еще одним ярким примером существования разных моделей является математическое моделирование одной и той же произвольной колебательной системы с учетом и без учета неидеальности возбуждения.

Очень часто возникают случаи, когда при исследовании реальной системы в рамках определенных предположений создается ее приближенная математическая модель, которая в дальнейшем используется для описания динамической системы совершенно иной природы. Так различные математические модели, полученные при описании маятниковых систем, успешно применяются для исследования оболочек, пластин, колец, для описания колебаний свободной поверхности жидкости в баках, для моделирования работы сердечной мышцы, для описания изменения численности биологических популяций и.т.д. В этом проявляется глубокая общность динамических явлений в материальном мире, которая отображается единством математических закономерностей, описывающих эту общность.

### **2.1.2 Кинематическая интерпретация и краткая классификация**

Рассмотрим динамические системы, которые моделируются конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что для таких





торной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

$$\text{где } \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad - \text{соответственно}$$

векторы и вектор-функция размерности  $n$ .

Далее всегда будем предполагать, что правые части системы (2.1) являются аналитическими функциями. Тогда эта система удовлетворяет условиям теоремы Коши–Пикара (существования и единственности решения задачи Коши). Каждому решению системы (2.1) отвечает одна и только одна траектория. Следовательно, через каждую точку фазового пространства проходит только одна траектория.

Приравняв правые части системы (2.1) нулю, то есть рассмотрим алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \\ X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \\ &\dots \\ X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пусть,  $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$  – некоторое решение системы (2.3). Очевидно, что это решение также будет решением и системы дифференциальных уравнений (2.1). Такое решение будет постоянным при изменении времени  $t$ . Ему соответствует фазовая траектория, которая состоит из одной точки, причем эта точка неподвижна в фазовом пространстве. Такие точки называются положениями или состояниями равновесия системы (2.1).

Пусть,

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_n = \varphi_n(t) \quad (2.4)$$

– некоторое решение системы (2.1), причем существует такое положительное число  $T$ , что для произвольного  $t$  имеют место равенства

$$\varphi_i(t + T) = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

однако при  $|\tau_1 - \tau_2| < T$ , хотя бы для одного  $i = 1, 2, \dots, n$  имеет место неравенство  $\varphi_i(\tau_1) \neq \varphi_i(\tau_2)$ . В этом случае траектория, которая отвечает решению (2.4), будет замкнутой линией в фазовом пространстве. Такая траектория называется циклом. Само решение (2.4) называется периодическим решением. Это решение считается изолированным периодическим решением, а его траектория называется предельным циклом, если существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что для любой точки  $M(x_1, \dots, x_n)$  фазового пространства, которая находится от цикла на расстоянии меньшем чем  $\varepsilon$ , решение системы (2.1), которое проходит через точку  $M(x_1, \dots, x_n)$  не является периодическим. Геометрически это означает, что в фазовом пространстве вблизи замкнутой траектории не проходят иные замкнутые траектории.

В теории дифференциальных уравнений доказано, что у системы (2.1) есть три сорта траекторий:

1. Положения равновесия, которые состоят из одной неподвижной точки в фазовом пространстве;
2. Циклы, которые являются замкнутыми линиями в фазовом пространстве;
3. Траектории без самопересечений (незамкнутые траектории).

Далее дадим более строгое определение динамической системы. Такое определение состоит из трех компонент:

1. Метрического пространства  $D$ , которое называется фазовым пространством. В частности фазовое пространство может совпадать со всем  $n$  – мерным евклидовым пространством  $R^n$ .
2. Времени  $t$ , которое может быть непрерывным, то есть  $t \in R^1$ , или дискретным, то есть  $t \in Z$  (все целые числа).
3. Закона (оператора) эволюции, то есть отображения любой заданной

точки  $x$  в фазовом пространстве  $D$  и любого значения  $t$  в однозначно определенное состояние  $\varphi(t, x) \in D$ , которое удовлетворяет теоретико-групповым свойствам:

- 3.1.  $\varphi(0, x) = x$ ;
- 3.2.  $\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x)$ ;
- 3.3.  $\varphi(t, x)$  непрерывно по  $(t, x)$ .

Если переменная  $t$  непрерывна, то указанные условия определяют непрерывную динамическую систему или поток. Другими словами, поток – это однопараметрическая группа гомеоморфизмов фазового пространства  $D$ . Фиксируя  $x$  и изменяя  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим ориентированную кривую, которая называется фазовой траекторией. Классификация траекторий совпадает с вышеприведенной классификацией для систем дифференциальных уравнений.

Если переменная  $t \in Z$ , то условия 3.1.–3.3. определяют дискретную динамическую систему или каскад. Каскады владеют следующим свойством. Рассмотрим гомеоморфизм  $\varphi(1, x)$  и обозначим его через  $\psi(x)$ . Очевидно, что  $\varphi(t, x) = \psi^t(x)$ , где

$$\psi^t = \psi(\psi(\dots(\psi(x)))).$$

Следовательно, для определения каскада достаточно определить только гомеоморфизм  $\psi : D \rightarrow D$ .

Для дискретной динамической системы последовательность  $\{x_k\}_{k=-\infty}^{k=+\infty}$ , где  $x_{k+1} = \psi(x_k)$ , называется траекторией точки  $x_0$ . Существуют три типа траекторий:

1. Точка  $x_0$ . Эта точка является неподвижной точкой гомеоморфизма  $\psi(x)$ , то есть отображается при помощи  $\psi(x)$  в себя;
2. Цикл  $(x_0, \dots, x_{k-1})$ , где  $x_i = \psi^i(x_0)$ ,  $i = 0, \dots, k-1$  а  $x_0 = \psi^k(x_0)$ . Кроме того,  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . Число  $k$  называется периодом цикла, а каждая точка  $x_i$  – периодической с периодом  $k$ . Заметим, что неподвижная точка также является периодической и имеет период равный 1;

3. Бесконечная в обе стороны траектория, то есть последовательность  $\{x_k\}_{k=-\infty}^{k=+\infty}$ , где  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . Такую последовательность будем называть незамкнутой.

Теперь вкратце остановимся на классификации динамических систем. В первую очередь динамические системы классифицируются в зависимости от вида оператора эволюции  $\varphi(t, x)$ . Операторы эволюции классифицируются в соответствии с их свойствами и по форме задания. Если оператор обладает свойством суперпозиции, то он и соответствующая динамическая система называются линейными. Если оператор – нелинейный, то и соответствующая динамическая система называется нелинейной.

Способы задания оператора эволюции  $\varphi(t, x)$  также могут отличаться. Его можно задавать в виде дифференциального или интегрального преобразования, в виде матрицы или таблицы, дискретного отображения, марковской цепи и т.д.

По энергетическому признаку динамические системы делятся на консервативные и диссипативные. Консервативные системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. В физике их называют гамильтоновыми. Динамические системы, энергия которых уменьшается с течением времени, вследствие трения, рассеивания и иных факторов, называются диссипативными. Подавляющее большинство реальных динамических систем являются диссипативными.

Среди динамических систем особенно важную роль играют системы, в которых возможны те или иные колебания. Такие динамические системы называют колебательными. Среди них выделяется особый класс так называемых автоколебательных систем, которые принципиально нелинейны и диссипативны. Автоколебательной называют динамическую систему, которая преобразует энергию источника возбуждения в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма и т.д.) определяются параметрами системы и, в определенных границах, не зависят от начального состояния системы.

### 2.1.3 Предельные множества динамических систем. Понятие странного аттрактора.

Предположим, что изучаемая динамическая система описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{x}$  вектор с компонентами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  вектор-функция с компонентами  $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Пусть начальное состояние системы (2.2) задается вектором  $\mathbf{x}_0$  с компонентами  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ . Предположим, что в фазовом пространстве динамической системы существуют два множества  $B$  и  $A \subset B$ . Причем  $B$  совокупность всех точек  $\mathbf{x}_0$  фазового пространства, для которых  $\mathbf{x} \in A$  при  $t \rightarrow +\infty$  или  $t \rightarrow -\infty$ . В этом случае множество  $A$  называется предельным множеством динамической системы.

Рассмотрим возможные типы предельных множеств диссипативной динамической системы, которые могут существовать в ограниченной области фазового пространства.

Если все точки  $\mathbf{x}_0 \in B$  стремятся к  $A$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то предельное множество является притягивающим и называется аттрактором. Соответственно множество  $B$  называется бассейном притяжения аттрактора.

Если все точки  $\mathbf{x}_0 \in B$  стремятся к  $A$  при  $t \rightarrow -\infty$ , то предельное множество является отталкивающим и называется репеллером.

Множество  $A$  может состоять из двух подмножеств,  $W^s$  и  $W^u$ , причем точки, которые принадлежат  $W^s$ , стремятся к  $A$  в прямом времени, в то же время точки, которые принадлежат  $W^u$ , стремятся к  $A$  в обратном времени. В этом случае  $A$  называется седловым множеством или просто седлом. Множества  $W^s$  и  $W^u$  называются, соответственно, устойчивым и неустойчивым многообразиями седла.

Простейшим предельным множеством динамической системы, которое состоит из одной точки, является положение равновесия. Оно может быть

аттрактором (устойчивый узел, устойчивый фокус), репеллером (неустойчивый узел, неустойчивый фокус) или седлом. Причем у седла устойчивым и неустойчивым многообразием являются, соответственно, его устойчивая и неустойчивая сепаратриссы. На рис. 2.1 показаны, слева направо, аттрактор (устойчивый фокус), репеллер (неустойчивый фокус) и седло.

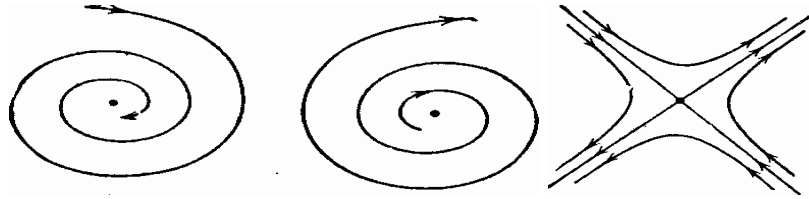


Рис. 2.1: Положения равновесия: аттрактор, репеллер и седло.

Заметим, что точка типа центр не является ни аттрактором, ни репеллером, ни седлом, так как отсутствует какое-нибудь множество точек, которые приближаются к центру в прямом или обратном времени. Точка типа центр – это особый случай предельного множества, для которого  $A = B$ .

В свою очередь, предельный цикл динамической системы будет аттрактором, если он устойчив, и репеллером, если он вполне неустойчив [2]. Полуустойчивый предельный цикл является седлом и называется седловым. На рис. 2.2 изображены слева направо: предельный цикл, который является аттрактором, предельный цикл, который является репеллером и седловой предельный цикл. У изображенного на этом рисунке предельного цикла устойчивое и неустойчивое многообразие располагаются, соответственно, снаружи и внутри цикла. Таким образом, аттрактор – это предельное множество в

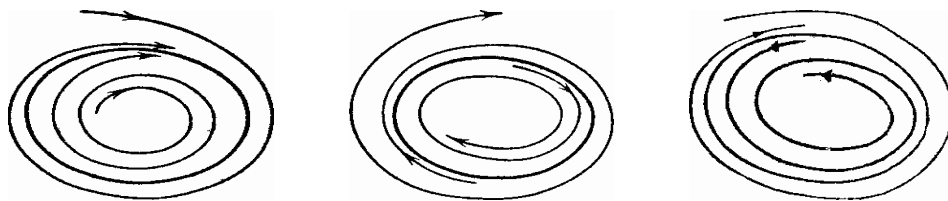


Рис. 2.2: Предельный циклы: аттрактор, репеллер и седловой.

фазовом пространстве, к которому притягиваются все остальные траектории

из бассейна притяжения. Подчеркнем, что аттракторы существуют только в диссипативных системах.

Движение в диссипативных системах целесообразно разделить на два класса: класс переходных, нестационарных движений, которые соответствуют процессу перехода от начального к предельному множеству состояний, и класс установившихся, стационарных движений, фазовые траектории которых принадлежат предельным множествам. Часто точную границу между этими классами движений провести невозможно. Эта граница зависит от точности проводимых вычислений при решении конкретной задачи.

В общей теории динамических систем доказано, что диссипативная динамическая система может иметь следующие типы аттракторов:

1. положения равновесия (точки в фазовом пространстве);
2. предельные циклы (замкнутые линии в фазовом пространстве);
3. квазипериодические аттракторы (тороидальные поверхности в фазовом пространстве).

Выше перечисленные аттракторы называются регулярными. Им соответствуют полностью предсказуемые во времени движения диссипативных динамических систем. Долгое время считалось, что только такие типы аттракторов существуют в динамических системах. Однако в 60-х годах прошлого века были открыты совершенно новые типы аттракторов в динамических системах. Оказалось, что движение полностью определенной (детерминированной) динамической системы может стать совершенно непредсказуемым (хаотичным). Причем, что особенно важно, эта непредсказуемость объясняется свойствами самой динамической системы, а не каким-либо внешним хаотическим воздействием. Однако, при всей своей непредсказуемости, такие движения обладают рядом четких количественных и качественных закономерностей (предсказуемостей), что существенно отличает их от классических стационарных случайных процессов. Поэтому для обозначения таких типов движений динамических систем стал употребляться парадоксальный термин – "детерминированный хаос". В свою очередь, для движений описываемых

регулярными аттракторами стал употребляться термин – "порядок".

Математическим образом детерминированного хаоса в фазовом пространстве являются сложным образом устроенные притягивающие множества, фазовые траектории которых не принадлежат ни к одному типу регулярных аттракторов. Фазовые траектории представляются в виде бесконечной линии, которая нигде не пересекается, не покидает при  $t \rightarrow +\infty$  замкнутой области и не притягиваются к регулярным аттракторам. Изображающая точка траектории время от времени возвращается в окрестность, произвольно выбранного на траектории начального состояния, однако эти возвращения непредсказуемы и имеют вид случайной последовательности. Такие аттракторы называются странными (хаотическими). Итак, с одной стороны имеется непредсказуемость положения изображающей точки траектории на аттракторе в заданный момент времени, а с другой стороны – налицо предсказуемость, так как точно известно, что эта точка принадлежит аттрактору.

Практически первый хаотический аттрактор был построен Е. Лоренцем в 1963г., в работе [189]. Сам термин странный аттрактор впервые появился в 1971г. в работе Ф. Рюелля и Д. Такенса [219].

Заметим, что в последнее время была проведена более детальная терминологическая классификация типов странных аттракторов. Здесь мы не будем останавливаться на этой классификации, которая хорошо описана в [5, 7].

## 2.2 Типы устойчивости траекторий

Снова рассмотрим динамическую систему, заданную системой дифференциальных уравнений в векторном виде (2.2):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}),$$

и предположим, что ее состояние задается  $n$  – мерным вектором  $\mathbf{x}(t)$ , а вектор-функция  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  отображает  $n$  – мерное евклидово пространство  $R^n$  в



себя. Как было установлено в многочисленных исследованиях, [5, 6, 7, 16, 62, 74, 126, 140], основным механизмом возникновения детерминированного хаоса является неустойчивость по Ляпунову траекторий аттрактора. Поэтому познакомимся с устойчивостью по Ляпунову и другими типами устойчивости системы (2.2).

Точка  $\mathbf{x}_0$ , а также выходящая из нее траектория  $\mathbf{x}(t)$  называются устойчивыми по Лагранжу [75], если траектория  $\mathbf{x}(t)$  всегда, при всех  $t > 0$ , остается в некоторой ограниченной области фазового пространства. Иными словами, существует такая константа  $M$ , что для всех  $t > 0$  выполняется неравенство  $\|\mathbf{x}(t)\| < M$ , где  $\|\mathbf{x}(t)\|$ , как правило, обычная евклидова норма:

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Здесь  $x_1, \dots, x_n$  – компоненты вектора  $\mathbf{x}$ .

Точка  $\mathbf{y}$  – мерного фазового пространства называется  $\omega$  – предельной точкой фазовой траектории  $\mathbf{x}(t)$ , если можно указать такую последовательность моментов времени  $t_k \rightarrow +\infty$ , что  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{y}$ . Аналогично точка  $\mathbf{z}$  называется  $\alpha$  – предельной, если можно указать такую последовательность моментов времени  $t_k \rightarrow -\infty$ , что  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{z}$ . Множество всех  $\omega$  – предельных точек называется  $\omega$  – предельным множеством данной траектории и обозначается через  $\Omega_{\mathbf{x}}$ . Соответственно множество всех  $\alpha$  – предельных точек называется  $\alpha$  – предельным множеством данной траектории и обозначается через  $A_{\mathbf{x}}$ . Траектория  $\mathbf{x}(t)$  называется устойчивой по Пуассону [75], если каждая ее точка является  $\omega$  – предельной и  $\alpha$  – предельной, то есть  $\mathbf{x}(t) \in \Omega_{\mathbf{x}} \cap A_{\mathbf{x}}$ .

Из определения устойчивости по Пуассону следует, что любой установившийся режим колебаний (как регулярный, так и хаотический) нелинейных диссипативных систем представляется траекториями устойчивыми по Пуассону. Обратное утверждение неверно. Действительно, не каждая устойчивая по Пуассону траектория представляет режим динамики, который можно считать установившимся. Это связано с тем, что само по себе свойство устойчи-

ности по Пуассону еще ничего не говорит о том, как ведут себя соседние траектории, притягиваются ли они к исходной или удаляются от нее. Однако заведомо справедливо, что траектории которые отвечают переходным процессам, устойчивыми по Пуассону не являются.

Рассмотрим несколько примеров различных типов траекторий. Самой простой траекторией является положение равновесия. Такая траектория состоит только из одной точки и, очевидно, устойчива по Пуассону.

Если рассмотреть траекторию, отличную от неподвижной точки, то, как следует из определения, устойчивой по Пуассону она будет в том случае, если обладает свойством возвращаться в как угодно малую окрестность каждой своей точки бесконечное число раз. Возврат траектории в  $\varepsilon$  – окрестность произвольно выбранной на ней начальной точки называется возвратом Пуанкаре.

Теперь рассмотрим предельный цикл. Очевидно, что возвраты Пуанкаре в произвольно выбранную начальную точку цикла будут фиксироваться периодически с как угодно большой точностью (рис. 2.3а). Время возврата  $T$  в этом случае будет просто периодом цикла. Оно не зависит от выбора  $\varepsilon$ , по крайней мере, для достаточно малых  $\varepsilon$ .

Рассмотрим следующий пример. Предположим, что для любого заданного  $\varepsilon$  можно указать период возврата  $T(\varepsilon)$ , один и тот же для произвольной начальной точки на данной траектории, причем при  $\varepsilon \rightarrow 0$  этот период стремиться к бесконечности. Следовательно, возвраты с данной степенью точности следуют один за другим регулярно, с правильной периодичностью, однако период возрастает, если мы желаем увеличить точность сравнения состояний. Как известно, такие движения называются квазипериодическими. В частности, к ним принадлежит суперпозиция двух периодических колебаний с рационально не соизмеримыми частотами. В фазовом пространстве этому типу движения соответствует траектория, которая всюду плотно покрывает тороидальную поверхность.

И наконец, детерминированный хаос – это такая ситуация, когда возвра-

ты Пуанкаре в  $\varepsilon$  – окрестность начальной точки происходят без признаков регулярности, а интервал времени между двумя последовательными возвратами каждый раз иной. В итоге наблюдается некоторая хаотическая последовательность времени таких возвратов (рис. 2.3в). Хаотичность таких возвратов может помочь нам идентифицировать тот факт, что в динамической системе существует странный аттрактор.

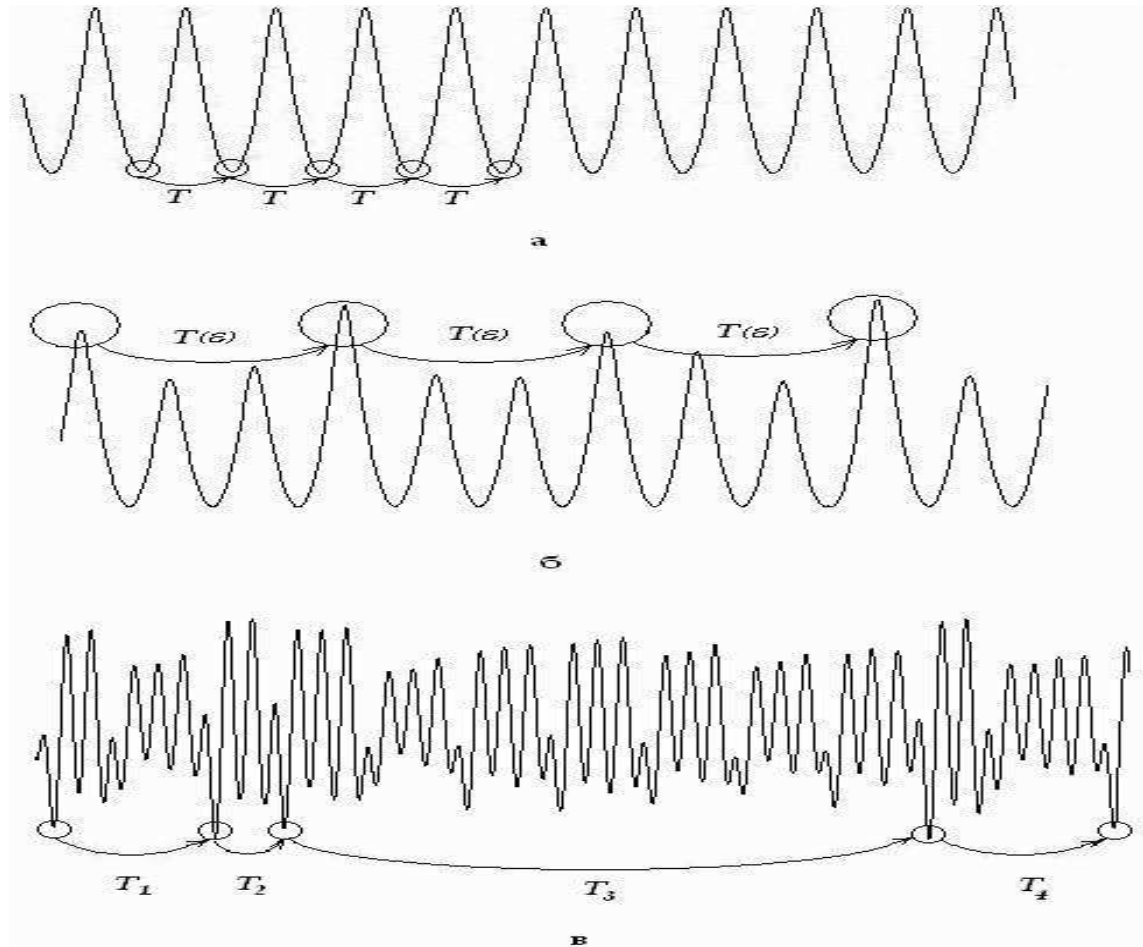


Рис. 2.3: Возвраты Пуанкаре.

Заметим, что определения устойчивости по Лагранжу и Пуассону, характеризуют какую-нибудь отдельно взятую траекторию и ничего не говорят о поведении близких к ней траекторий. Такое поведение описывает устойчивость по Ляпунову. Предположим, что система (2.2) при старте с точки  $\mathbf{x}_0$  порождает траекторию  $\mathbf{x}(t)$ , при старте с точки  $\mathbf{y}_0$  – траекторию  $\mathbf{y}(t)$ . Траектория  $\mathbf{x}(t)$  называется устойчивой по Ляпунову, если для произвольного,

как угодно малого  $\varepsilon > 0$ , существует такое  $\delta > 0$ , что для любой стартовой точки  $\mathbf{y}_0$ , которая удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0\| < \delta,$$

при всех  $t > 0$  выполняется неравенство

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon.$$

Таким образом, если две траектории близки в начальный момент времени, то они остаются близкими и в любой последующий момент времени.

Траектория  $\mathbf{x}(t)$  называется асимптотически устойчивой, если она устойчива по Ляпунову и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0$ .

Наглядная иллюстрация различных типов устойчивости приведена на рис. 2.4. Слева показана траектория устойчивая по Лагранжу. Она все время остается в замкнутой области. В центре траектория устойчивая по Пуассону. Она многократно возвращается в  $\varepsilon$  – окрестность стартовой точки. Наконец, справа траектория устойчивая по Ляпунову. Две близкие в начальный момент времени траектории навсегда остаются близкими.

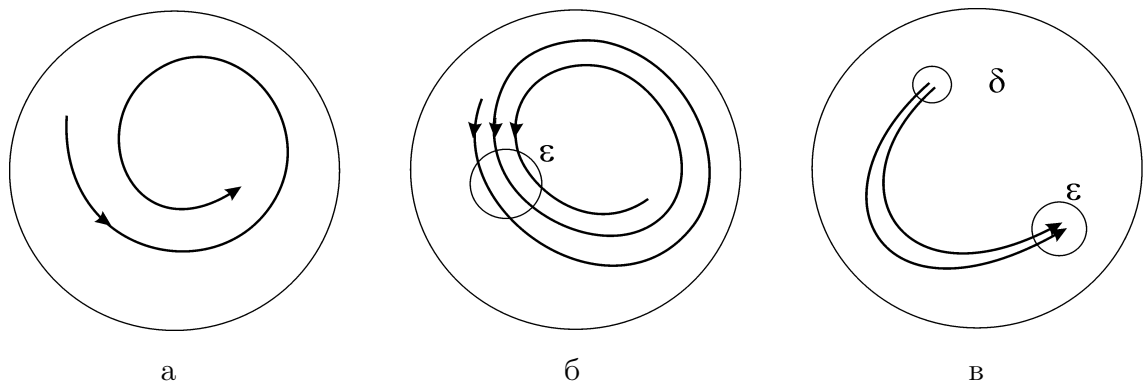


Рис. 2.4: Устойчивость по Лагранжу (а), Пуассону (б) и Ляпунову (в).

В дальнейшем, если противное не оговорено специально, под устойчивостью будем понимать устойчивость по Ляпунову.

Имеет место следующая теорема, которую приведем без доказательства.  
**Теорема.** Если непериодическая траектория устойчива по Пуассону и по Ляпунову, то она квазипериодична.

Из этой теоремы сразу вытекает, что все регулярные аттракторы динамических систем (положения равновесия, предельные циклы и квазипериодические аттракторы) устойчивы как по Пуассону, так и по Ляпунову. В свою очередь, все странные аттракторы динамических систем устойчивы по Пуассону и неустойчивы по Ляпунову.

## 2.3 Спектр ляпуновских характеристических показателей

Рассмотрим динамическую систему в векторной форме (2.2). Пусть  $\mathbf{x}(t)$  некоторая фазовая траектория этой системы, которую мы будем называть невозмущенной. Далее, пусть  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$  – близкая к невозмущенной траектория, которая реализуется при незначительно измененном начальном условии. Назовем траекторию  $\mathbf{y}(t)$  возмущенной. Тогда эволюция малого возмущения  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  в линейном приближении описывается уравнением первого приближения:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(t)\tilde{\mathbf{x}}, \quad (2.5)$$

где матрица  $\mathbf{A}(t)$  имеет вид:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Для системы (2.5) имеет место теорема [62].

**Теорема Ляпунова.** Пусть существует такая константа  $M$ , что для

всех элементов  $A_{ij}$  матрицы  $A$  и для произвольного  $T$ ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T |A_{ij}(t)| dt \leq M,$$

тогда

1. Для любого решения  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  уравнения (2.5) существует ляпуновский характеристический показатель – действительное число, отличное от  $\pm\infty$ , которое определяется по формуле:

$$\lambda_{\tilde{\mathbf{x}}(t)} = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\tilde{\mathbf{x}}(T)\|; \quad (2.6)$$

2. При умножении решения на константу  $C$  ляпуновский характеристический показатель не изменяется

$$\lambda_{C\tilde{\mathbf{x}}(t)} = \lambda_{\tilde{\mathbf{x}}(t)}; \quad (2.7)$$

3. Ляпуновский характеристический показатель линейной комбинации двух решений не превышает большего из показателей этих двух решений

$$\lambda_{C_1\tilde{\mathbf{x}}_1(t)+C_2\tilde{\mathbf{x}}_2(t)} \leq \max(\lambda_{\tilde{\mathbf{x}}_1(t)}, \lambda_{\tilde{\mathbf{x}}_2(t)}); \quad (2.8)$$

4. Существует  $n$  линейно независимых решений  $\tilde{\mathbf{x}}_i(t)$  (фундаментальная система решений) уравнения (2.5), которым соответствует  $n$  ляпуновских характеристических показателей, которые нумеруются в порядке убывания  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Доказательство этой теоремы приведено во многих классических курсах по устойчивости движения, например [25].

Набор чисел  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  называется спектром ляпуновских характеристических показателей (ЛХП). Наибольшее из этих чисел  $\lambda_1$  называется старшим ляпуновским показателем. Спектр ЛХП следует рассматривать как характеристику линейной системы уравнений (2.5) в целом, а не какого-нибудь одного решения  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ , поскольку решение не зависит от выбора фундаментальной системы  $\{\tilde{\mathbf{x}}_i(t)\}$ . В силу (2.7)–(2.8) для любого решения  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$

ляпуновским характеристическим показателем обязательно будет одно из чисел  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ .

Теперь вернемся к исходной нелинейной системе уравнений (2.2). Для каждой траектории  $\mathbf{x}(t)$  система первого приближения (2.5) дает вполне определенный спектр ЛХП. Присутствие в этом спектре показателя  $\lambda$  означает, в силу (2.6), что существует такое возмущение исходной траектории, которое эволюционирует во времени, в линейном приближении, как  $e^{\lambda t}$ . Следовательно, присутствие в спектре хотя бы одного положительного показателя означает неустойчивость рассматриваемой траектории. Если все показатели отрицательны, то это свидетельствует об асимптотической устойчивости траектории.

Можно доказать [25], что для положения равновесия системы (2.2) спектр ЛХП состоит из действительных частей собственных чисел матрицы системы первого приближения. Для предельного цикла системы (2.2) спектр ЛХП определяется по формуле [25]:

$$\lambda_i = \frac{\ln |\rho_i|}{T}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $\rho_i$  – мультипликатор предельного цикла, а  $T$  – его период.

До сих пор говоря о спектре ЛХП мы приписывали его некоторой фазовой траектории. Зададимся теперь более общим вопросом про устойчивость динамической системы в установившемся режиме, что диктует необходимость определения спектра ЛХП аттрактора. Если аттрактор представляет собой положение равновесия или предельный цикл, то он состоит из одной траектории и уже определенный нами спектр, естественно, будет спектром ЛХП такого аттрактора. Если же аттрактор состоит из множества траекторий, как, например, тор или странный аттрактор, то возникает далеко не очевидный вопрос, возможно ли приписать аттрактору в целом спектр какой-либо траектории этого аттрактора. Тут на помощь приходит мультипликативная эргодическая теорема В.И. Оселедца [76], которая утверждает, что типичная взятая наугад траектория на аттракторе с единичной вероятностью будет

иметь вполне определенный спектр ЛХП, который можно приписать аттрактору в целом.

Спектр ЛХП аттрактора диссипативной динамической системы должен удовлетворять следующим требованиям:

1. Сумма всех  $n$  показателей должна быть отрицательной

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0.$$

Это условие диссипативности, благодаря которому аттрактор является притягивающим предельным множеством нулевой меры в фазовом пространстве [5, 62];

2. У аттрактора, отличного от положения равновесия, обязательно должен быть хотя бы один нулевой показатель.

Действительно, рассмотрим две траектории на аттракторе, которые стартуют, соответственно, из точек  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  и  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}(t_0 + \Delta t)$ , где временной сдвиг  $\Delta t$  считается малым. По предположению, аттрактор не является положением равновесия, поэтому  $\mathbf{y}_0$  не совпадает с  $\mathbf{x}_0$ . Обе изображающие точки следуют по одной траектории, то есть отличаются только временным сдвигом, поэтому

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t - \Delta t) - \mathbf{x}(t) \approx \dot{\mathbf{x}}(t)\Delta t = \mathbf{X}(\mathbf{x})\Delta t.$$

Однако правые части системы (2.2) ограничены по норме,  $\|\mathbf{X}(\mathbf{x})\| < M$ , поэтому  $\|\mathbf{X}(\mathbf{x})\Delta t\| < M|\Delta t|$ . Таким образом, ляпуновский характеристический показатель для возмущения типа сдвига траекторий равен:

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{x}(T)\| = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln M|\Delta t| = 0.$$

Предположим, что ляпуновские характеристические показатели упорядочены по убыванию. Будем обозначать положительный показатель знаком '+', отрицательный – знаком '-', а нулевой – нулем. Тогда аттрактору динамической системы в фазовом пространстве размерности  $n$  будет соответствовать набор из  $n$  знаков, который мы будем называть сигнатурой спектра



ЛХП. Изучим какими могут быть эти сигнатуры при различных размерностях фазового пространства.

При  $n = 1$  возможен только один вариант сигнатуры  $\langle - \rangle$ , что соответствует аттрактору в виде неподвижной точки – асимптотически устойчивому положению равновесия.

При  $n = 2$  возможны только два варианта сигнатуры:

$\langle -, - \rangle$  – устойчивое положение равновесия;

$\langle 0, - \rangle$  – предельный цикл.

Покажем, что при  $n = 2$  все остальные варианты сигнатур невозможны. Действительно, сигнатуры  $\langle +, 0 \rangle$ ,  $\langle 0, 0 \rangle$  невозможны, так как такие сигнатуры противоречат условию диссипативности (сумма ляпуновских показателей не будет отрицательной). Вариант  $\langle +, - \rangle$  также исключен, так как положения равновесия с такой сигнатурой неустойчиво и не является аттрактором. Если же аттрактор не является положением равновесия, то такая сигнатура исключена в силу условия обязательного наличия, в этом случае, нулевого показателя.

Возможность возникновения аттрактора с положительным ляпуновским характеристическим показателем возникает, начиная с размерности фазового пространства  $n = 3$ . Здесь возможны такие варианты сигнатур:

$\langle -, -, - \rangle$  – устойчивое положение равновесия;

$\langle 0, -, - \rangle$  – предельный цикл;

$\langle 0, 0, - \rangle$  – двумерный тор;

$\langle +, 0, - \rangle$  – странный аттрактор.

Все остальные варианты сигнатур противоречат или условию диссипативности, или – необходимости наличия нулевого показателя для аттракторов, которые не являются неподвижными точками, или – определению аттрактора.

При возрастании размерности фазового пространства число возможных вариантов сигнатур существенно возрастает. Например, при  $n = 4$  кроме странного аттрактора с одним положительным ляпуновским показателем

$\langle +, 0, -, - \rangle$  может существовать странный аттрактор с двумя положительными показателями  $\langle +, +, 0, - \rangle$ . Странные аттракторы, которые имеют в спектре ЛХП более одного положительного показателя, называются гиперхаотическими.

Таким образом, для динамических систем, которые описываются автономными дифференциальными уравнениями, мы пришли к фундаментальному выводу – принципиальная возможность реализации странного аттрактора начинается с размерности фазового пространства  $n = 3$ . На фазовой плоскости существование фазовых аттракторов невозможно.

Кстати, невозможность странного аттрактора на плоскости может быть доказана такими простыми рассуждениями. Любой аттрактор, в том числе и странный, должен быть устойчивым по Лагранжу (располагаться в ограниченной области фазового пространства) и по Пуассону (изображающая точка должна бесконечное количество раз возвращаться в  $\varepsilon$  – окрестность стартовой точки траекторий аттрактора). На фазовой плоскости это обязательно приведет к самопересечению траектории, что противоречит теореме Коши–Пикара. Следовательно, странный аттрактор на фазовой плоскости не может существовать.

Наличие в спектре ЛХП положительного показателя является одним из основных критериев идентификации странных аттракторов в конкретных прикладных динамических системах. Поэтому очень важно уметь вычислять спектр ЛХП или хотя бы старший показатель спектра. К сожалению, для большинства практических динамических систем непосредственное вычисление показателя по формуле

$$\lambda = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \| \tilde{\mathbf{x}}(T) \| \quad (2.9)$$

невозможно, так как траектория аттрактора не может быть найдена для произвольной системы при помощи квадратурных формул. Поэтому для подсчета ляпуновских характеристических показателей приходится применять методики, основанные на численных методах. Одной из наиболее применяемых

таких методик является так называемый алгоритм Бенеттина и др. [137].

Итак, снова рассмотрим динамическую систему (2.2):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}).$$

Процедура вычисления старшего ляпуновского показателя начинается с построения численного решения системы (2.2) на интервале времени, достаточном для того, чтобы обрести уверенность в выходе траектории  $\mathbf{x}(t)$  на аттрактор, то есть отбрасываются фазовые координаты траектории, соответствующие переходному процессу. Длительность переходного процесса не подчиняется каким-либо общим закономерностям и поэтому ее приходится определять индивидуально для каждой конкретной задачи. В качестве расчетного численного метода чаще всего применяется метод Рунге–Кутты четвертого или пятого порядка. Для увеличения точности расчетов целесообразно использовать переменный временной шаг счета, проводя коррекцию этого шага с применением корректирующей процедуры Дормана–Принса [148]. Это позволяет добиться локальной погрешности вычислений порядка  $O(10^{-15})$ . Конечную точку этого численного счета обозначим через  $\mathbf{x}_0$  и принимаем ее за начальную точку траектории на аттракторе. Затем выводим систему уравнений первого приближения:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \tilde{\mathbf{x}}. \quad (2.10)$$

Далее будем совместно решать системы уравнений (2.2) и (2.10). При этом для системы уравнений (2.2) в качестве начальной точки берем  $\mathbf{x}_0$ , а для системы (2.10) – некоторую точку  $\tilde{\mathbf{x}}_0$ , для которой выполняется соотношение  $\|\tilde{\mathbf{x}}_0\| = 1$ . Например, в качестве начального вектора возмущения можно взять вектор  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$ . Зададим некоторый временной интервал  $T$  и решим численно системы (2.2) и (2.10), найдя вектор состояния и его возмущение в момент времени  $T$ :  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}(T) = \tilde{\mathbf{x}}_1$ .

Теперь переопределим вектор возмущения так, чтобы его направление оставалось неизменным, а норма равнялась исходному значению 1, то есть

положим  $\tilde{\mathbf{x}}_1^0 = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_1\|}$ . Необходимость такой перенормировки связана с тем, что в том случае, когда траектория неустойчива (например, принадлежит странному аттрактору), амплитуда возмущения очень быстро стремится к бесконечности и без выполнения перенормировки произойдет переполнение регистров компьютера, вследствие чего компьютер остановится.

Далее снова продолжаем процедуру численного решения системы (2.2) с начальной точкой  $\mathbf{x}_1$  и систему (2.10) с начальной точкой  $\tilde{\mathbf{x}}_1^0$ . Отыскав вектор состояния и вектор возмущения в момент  $2T$ :  $\mathbf{x}(2T) = \mathbf{x}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}(2T) = \tilde{\mathbf{x}}_2$  перепределяем вектор возмущения  $\tilde{\mathbf{x}}_2^0 = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_2\|}$ . Затем многократно повторяем аналогичную процедуру нахождения решений и перенормировки.

Качественно алгоритм Бенеттина можно проиллюстрировать при помощи следующего рисунка.

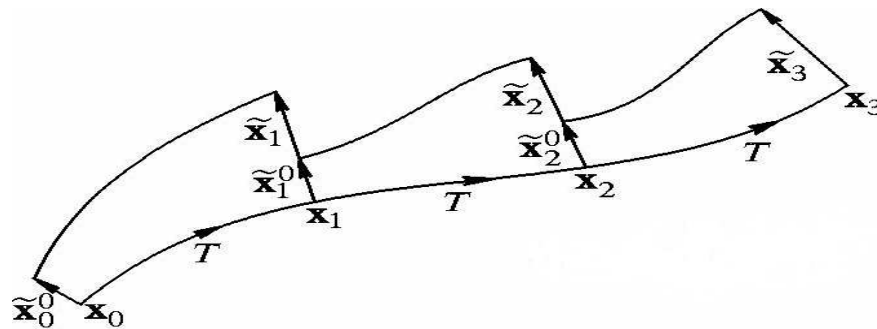


Рис. 2.5: Качественная схема алгоритма Бенеттина.

Если начальная точка  $\mathbf{x}_0$  принадлежит типичной траектории аттрактора, а начальное возмущение  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  взято наугад, то эволюция амплитуды возмущения будет определяться, очевидно, старшим ляпуновским характеристическим показателем. В силу формулы (2.9) приближенно получим:

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{KT} \sum_{i=1}^K \ln \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|. \quad (2.11)$$

При этом число шагов  $K$  должно быть достаточно большим. Практически мы заканчиваем численные вычисления, когда значение величины  $\lambda_1$  становится неизменным относительно какого-либо, наперед выбранного, количества

знаков после десятичной разделительной точки. Далее описанную процедуру желательно повторить несколько раз с разными начальными условиями для вектора состояния и вектора возмущения и провести статистическую обработку полученных результатов. Длина интервала перенормировки  $T$  выбирается индивидуально для каждой конкретной задачи. При компьютерных вычислениях эта величина, с одной стороны, не должна быть очень большой, дабы не наступило переполнение регистров компьютера, а с другой стороны, не должна быть очень малой, дабы избежать очень длительного времени вычислений.

Теперь перейдем к процедуре вычисления полного спектра ЛХП аттрактора. Для вычисления оставшихся ляпуновских показателей необходимо рассматривать эволюцию соответствующего числа векторов возмущения вдоль рассматриваемой фазовой траектории. Если проводить расчеты по вышеописанному алгоритму Бенеттина и др., то в любом векторе возмущения, при достаточно большом времени численного счета, будет доминировать составляющая с максимальным ляпуновским показателем. Поэтому для расчета последующих показателей необходимо модифицировать расчетный алгоритм. Такой обобщенный алгоритм был предложен Бенеттином и др. в работах [138, 139]. В обобщенном алгоритме перенормирование векторов возмущения сопровождается их ортогонализацией по Граму-Шмидту.

Опишем обобщенный алгоритм Бенеттина и др. на примере системы с размерностью фазового пространства  $n = 3$ . В этом случае спектр ЛХП состоит из трех показателей. Численно решаем исходную систему уравнений (2.2) на интервале времени, достаточном для того, чтобы обрести уверенность в завершении переходного процесса и выходе траектории на аттрактор. Затем исходную систему уравнений (2.2) дополняем тремя идентичными копиями ее уравнений первого приближения (2.10). Далее начинаем численно решать эти четыре системы. При этом в качестве начальных векторов возмущений задаем набор векторов  $\tilde{\mathbf{x}}_0^0, \tilde{\mathbf{y}}_0^0, \tilde{\mathbf{z}}_0^0$ , которые образуют ортонормированную систему векторов. Например, всегда можем взять такие векторы,  $\tilde{\mathbf{x}}_0^0 = \{1, 0, 0\}$ ,

$\tilde{\mathbf{y}}_0^0 = \{0, 1, 0\}$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_0^0 = \{0, 0, 1\}$ . Через некоторое время  $T$  траектория системы (2.2) придет в точку  $\mathbf{x}_1$ , векторы возмущений, соответственно, будут равняться  $\tilde{\mathbf{x}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_1$ . Перенормируем их и ортогонализируем по Граму-Шмидту:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_1^0 &= \frac{\tilde{\mathbf{x}}_1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_1\|}; \\ \tilde{\mathbf{y}}_1' &= \tilde{\mathbf{y}}_1 - (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_1^0)\tilde{\mathbf{x}}_1^0, \quad \tilde{\mathbf{y}}_1^0 = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_1'}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1'\|}; \\ \tilde{\mathbf{z}}_1' &= \tilde{\mathbf{z}}_1 - (\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_1^0)\tilde{\mathbf{x}}_1^0 - (\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_1^0)\tilde{\mathbf{y}}_1^0, \quad \tilde{\mathbf{z}}_1^0 = \frac{\tilde{\mathbf{z}}_1'}{\|\tilde{\mathbf{z}}_1'\|}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Здесь  $(.,.)$  означает скалярное произведение векторов. Далее продолжим численные расчеты, отправляясь от точки  $\mathbf{x}_1$  и векторов возмущений  $\tilde{\mathbf{x}}_1^0$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}_1^0$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_1^0$ . Затем через очередной интервал времени  $T$  получим новый набор векторов возмущений  $\tilde{\mathbf{x}}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_2$ , который снова ортогонализируем и перенормируем в соответствии с процедурой (2.12). Описанная последовательность действий повторяется достаточно большое число раз  $K$ . В ходе проводимых вычислений определяем суммы:

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^K \ln \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|, \quad \Lambda_2 = \sum_{i=1}^K \ln \|\tilde{\mathbf{y}}_i'\|, \quad \Lambda_3 = \sum_{i=1}^K \ln \|\tilde{\mathbf{z}}_i'\|. \tag{2.13}$$

В этих суммах фигурируют векторы возмущений до перенормировки. Тогда ляпуновские характеристические показатели приближенно определяются по формулам:

$$\lambda_i \approx \frac{\Lambda_i}{KT}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.14}$$

Аналогично определяется спектр ЛХП при произвольной размерности фазового пространства.

## 2.4 Сечение и отображение Пуанкаре

Рассмотрим динамическую систему с непрерывным временем, динамика которой описывается некоторыми дифференциальными уравнениями. Пусть,

для определенности, это система с трехмерным фазовым пространством вида:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y, z); \\ \dot{y} &= f_2(x, y, z); \\ \dot{z} &= f_3(x, y, z).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Далее рассмотрим некоторое решение системы (2.15), которому отвечает в фазовом пространстве траектория  $\Gamma$ . Поместим в фазовом пространстве некоторую плоскость  $S$ , уравнение которой имеет вид:

$$S(x, y, z) = 0.\tag{2.16}$$

Выбор такой плоскости достаточно произвольный, однако она должна размещаться так, чтобы траектория  $\Gamma$  многократно ее пересекала и касание траектории с плоскостью было невозможно (трансверсальное пересечение). Такая плоскость  $S$  называется секущей Пуанкаре фазовой траектории  $\Gamma$ . Обозначим точки пересечения траектории  $\Gamma$  с секущей  $S$  через  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (рис. 2.6). Заметим, что последовательность точек  $\{a_n\}$  задается пересечением  $\Gamma$  с  $S$  в одном направлении. Полученное дискретное множество точек  $\{a_n\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  на секущей Пуанкаре называется сечением Пуанкаре для траектории  $\Gamma$ .

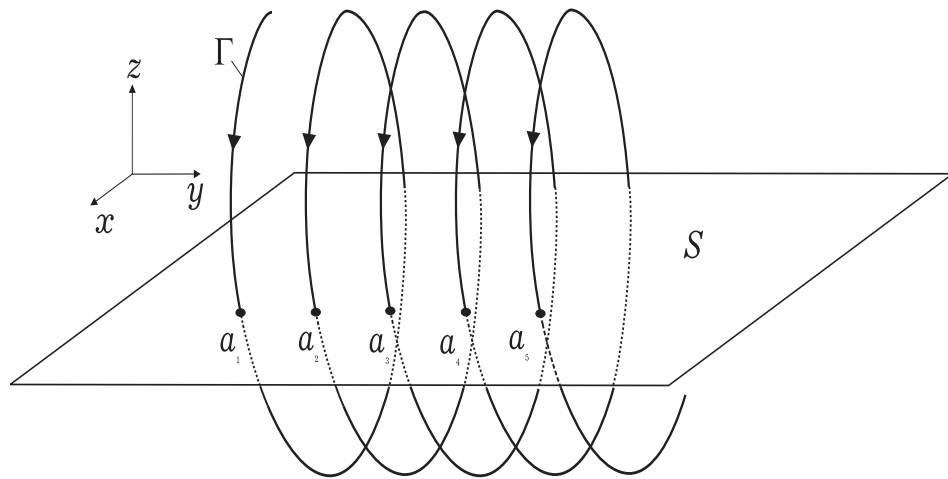


Рис. 2.6: Сечение Пуанкаре.

Сечение Пуанкаре также порождает некоторое дискретное отображение, которое ставит в соответствие любой точке  $a_n$  ближайшую последующую за  $a_n$  точку  $a_{n+1}$ . Закон соответствия между предыдущей и последующей точками сечения Пуанкаре называется отображением последования или отображением Пуанкаре. Для рассматриваемого трехмерного случая это отображение будет уже двумерным

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= P_1(x_n, y_n); \\ y_{n+1} &= P_2(x_n, y_n),\end{aligned}\tag{2.17}$$

так как точки сечения Пуанкаре располагаются на плоскости и третью координату всегда можно выразить через две первых.

Таким образом, задача изучения динамической системы (2.15) может быть сведена к задаче изучения соответствующего отображения Пуанкаре, которое имеет размерность на единицу меньшую, чем размерность исходной динамической системы. При этом структура динамической системы однозначно (но не взаимно однозначно) определяет структуру порождаемого ею дискретного отображения (2.17). Эта подмена объекта исследования не сопровождается какими-нибудь аппроксимациями, анализ остается точным. Однако при такой подмене объекта исследования мы утрачиваем информацию про характер динамики в промежутках времени между последовательными пересечениями секущей плоскости, в частности, про длительность интервалов времени между этими пересечениями и про топологические свойства фазовой траектории. Тем не менее сохраняется возможность анализировать много принципиальных вопросов, например, возникает в системе регулярный или хаотический режим.

Пусть дискретные уравнения (2.17) являются отображением Пуанкаре дифференциальных уравнений (2.15). Предположим, что  $(x_0, y_0)$  – устойчивая неподвижная точка этого отображения. Ей будет соответствовать устойчивый однотоктный предельный цикл системы (2.15) [2].

Предположим, что дискретные уравнения (2.17) имеют периодическое



решение:

$$x_{n+k} = x_n, \quad y_{n+k} = y_n, \quad (2.18)$$

где  $k$  – дискретный период. Такое решение будем называть  $k$  – циклом. Тогда  $k$  – циклу отображения будет соответствовать более сложный  $k$  – тактный предельный цикл системы (2.15)[2]. Причем спектр ЛХП такого  $k$  – цикла дискретного отображения (2.17), дополненный нулевым показателем, совпадает со спектром ЛХП системы [5].

Если решением дискретной системы (2.17) является квазипериодическая или хаотическая последовательность, то соответственно квазипериодический или хаотический режим будет устанавливаться в системе дифференциальных уравнений (2.15). При этом спектры ЛХП квазипериодических и хаотических отображений совпадают с соответствующими спектрами ЛХП квазипериодических или хаотических аттракторов системы (2.15) за исключением одного нулевого показателя [5].

Найти отображения Пуанкаре для конкретных нелинейных систем в явном виде удастся очень редко, в тех исключительных случаях, когда дифференциальные уравнения допускают аналитическое решение. Однако можно построить отображение Пуанкаре как численный алгоритм. При этом возникают две самостоятельные задачи. Первая – это нахождение некоторой траектории  $\Gamma$  системы (2.15) при заданных начальных условиях. Вторая – это определение координат точек пересечения траектории с секущей плоскостью, то есть построение сечения и отображения Пуанкаре. Вычислить траекторию можно при помощи любого известного численного метода. Как мы уже отмечали, для этого чаще всего применяются методы Рунге–Кутты. А для определения точек пересечения траектории с секущей плоскостью необходимо на каждом шаге численного интегрирования системы (2.15) вычислять значения функции  $S(x, y, z)$  до тех пор, пока не будет зафиксирован момент смены знака  $S(x, y, z)$ , который соответствует моменту пересечения траекторией секущей плоскости.

Например, пусть смена знака функции  $S(x, y, z)$  случилась между  $n$ -тым и  $(n + 1)$  шагами, так что величины  $S_n = S(x(n\Delta t), y(n\Delta t), z(n\Delta t))$  и  $S_{n+1} = S(x((n + 1)\Delta t), y((n + 1)\Delta t), z((n + 1)\Delta t))$ , где  $\Delta t$  – шаг численного интегрирования, имеют разные знаки, как показано на рис. (2.7). Далее необходимо уточнить значение точки пересечения  $a_s$ . Эту задачу можно решить с заданной степенью точности, применив методы интерполяции. Последовательно уменьшая шаг интегрирования в два раза, возможно закончить вычисления, когда разность  $|S_{n+1} - S_n|$  будет меньше наперед заданной величины, которая определяет точность расчета точек  $a_s$ . Принципиальных трудностей здесь нет, однако возрастающие требования к точности определения  $a_s$  потребуют дополнительных вычислений, что усложнит соответствующие алгоритмы вычисления и значительно увеличит время необходимое для расчетов.

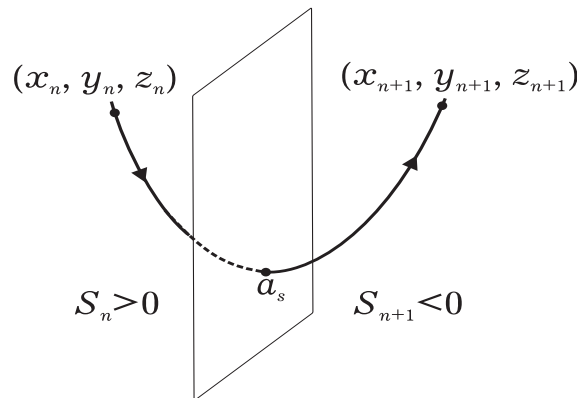


Рис. 2.7:

Для преодоления этих сложностей М.Ено [167] был предложен простой и экономичный метод, который состоит в следующем. Дополним систему уравнений (2.15) еще одним соотношением, а именно

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial S}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Так как  $(\dot{\phantom{x}}) = \frac{d}{dt}$ , то, учитывая (2.15), можем записать

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} f_1(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial y} f_2(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial z} f_3(x, y, z). \quad (2.19)$$

Введем для удобства обозначения

$$H(x, y, z) = \frac{\partial S}{\partial x} f_1(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial y} f_2(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial z} f_3(x, y, z),$$

$$\frac{dS}{dt} = H(x, y, z).$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{dx}{dS} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dS}, \quad \frac{dy}{dS} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dS}, \quad \frac{dz}{dS} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dS}, \quad \frac{dt}{dS} = \frac{1}{H(x, y, z)},$$

можем записать

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dS} &= \frac{f_1(x, y, z)}{H(x, y, z)}, \\ \frac{dy}{dS} &= \frac{f_2(x, y, z)}{H(x, y, z)}, \\ \frac{dz}{dS} &= \frac{f_3(x, y, z)}{H(x, y, z)}, \\ \frac{dt}{dS} &= \frac{1}{H(x, y, z)}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Возьмем значения  $x, y, z, t$  и  $S$ , полученные на  $(n + 1)$  шаге численного интегрирования и сделаем еще один шаг по  $S$ , величина которого равна

$$\Delta S = -S_{n+1}.$$

В результате интегрирования системы (2.15) только на одном шаге  $\Delta S = -S_{n+1}$  мы сразу попадаем на секущую  $S$ , причем ошибка определения точки пересечения строго равняется погрешности интегрирования системы (2.15) на одном шаге и будет минимальной. При нахождении других точек пересечения (если они существуют) траекторией  $\Gamma$  плоскости  $S$  каждый раз будем интегрировать систему (2.20) на одном шаге  $\Delta S = -S_{n+1}$ , который будет изменяться для каждой новой точки пересечения.

Алгоритм построения отображения Пуанкаре по методу Ено удобно программировать сразу как численное решение уравнений (2.20). При этом функция  $H(x, y, z)$  полагается равной единице до тех пор, пока выполняются стандартные шаги по времени, и переопределяется в соответствии с (2.19), когда

возникает необходимость провести нестандартный шаг по  $S$ . Так как в обоих случаях используется один и тот же численный метод, достигается желаемое согласование по точности.

Все проведенные рассуждения очевидным образом распространяются на фазовое пространство большей размерности, только вместо секущей двумерной плоскости необходимо использовать сечение  $n$  – мерного фазового пространства гиперповерхностью размерности  $n - 1$ . То обстоятельство, что при использовании отображения Пуанкаре размерность уменьшается на единицу, иногда бывает очень полезной.

Метод сечения Пуанкаре особенно нагляден в случае  $n = 3$ , когда множество точек пересечения лежит на двумерной поверхности. Для  $n > 4$  графическое представление многомерного сечения Пуанкаре утрачивает наглядность. В этих случаях анализируют двух- или трехмерные проекции сечений Пуанкаре.

Для периодических решений динамической системы сечение Пуанкаре, как многомерное, так и его проекции, содержит конечное число неподвижных точек, которые повторяются строго через период решения. В режиме странного аттрактора на секущей появится некоторое хаотическое множество точек, число которых будет возрастать с возрастанием времени численного интегрирования. В некоторых случаях это хаотическое множество может располагаться вдоль тонкой ленты, близкой по структуре к одномерной кривой на секущей. Эту кривую приближенно можно принять за отображение Пуанкаре и анализировать методом диаграмм Ламерея [2].

Следует отметить, что при изучении хаотических режимов достоверную информацию о структуре сечения Пуанкаре можно получить только при достаточно большом числе точек в сечении Пуанкаре. Как правило, это число имеет порядок  $O(10^4) - O(10^5)$ , поэтому для представления таких точечных множеств необходимо использовать компьютерные методы обработки информации.

## 2.5 Размерность аттракторов

Как мы уже отмечали, математическим образом детерминированного хаотического режима в динамической системе являются странные аттракторы, которые имеют чрезвычайно сложную геометрическую структуру. Одной из важных характеристик любого геометрического объекта является его размерность. К настоящему времени в рассмотрение введено много типов размерностей для аттракторов динамических систем. Например, фрактальная емкость, размерность Хаусдорфа–Безиковича [62, 126], информационная и корреляционная размерности, обобщенные размерности Реньи [162, 163, 168] и т. д. Такие размерности могут давать существенную информацию о структуре аттрактора, служить количественным отличительным признаком регулярного аттрактора от странного, а для странных аттракторов выступать как некая мера "странности" аттрактора [163].

Практически все известные странные аттракторы являются фрактальными множествами, которые имеют дробную размерность Хаусдорфа–Безиковича. Этим они отличаются от регулярных аттракторов, соответствующая размерность которых является целой. Непосредственный подсчет фрактальной размерности странного аттрактора является чрезвычайно трудоемкой задачей, для решения которой в общем случае не существует каких-либо стандартных алгоритмов. Однако сравнительно просто может быть подсчитана так называемая ляпуновская размерность аттрактора, которая на практике чаще всего используется в качестве количественной меры фрактальности.

Рассмотрим диссипативную динамическую систему размерности  $n$ . Наряду с исходной динамической системой рассмотрим ансамбль ее идентичных копий, которые отличаются друг от друга только различными начальными состояниями. В начальный момент времени в фазовом пространстве этому ансамблю будет соответствовать некое "облако" изображающих точек. В процессе эволюции начальное облако будет изменяться в соответствии

с динамикой системы, задаваемой ее математической моделью.

Предположим, что у рассматриваемой динамической системы существует странный аттрактор. Спектр ЛХП такого аттрактора состоит из  $n$  показателей, упорядоченных по убыванию  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Причем  $\lambda_1 > 0$  и, по крайней мере, существует один нулевой показатель. Кроме того, в силу диссипативности системы, сумма всех ляпуновских характеристических показателей отрицательна:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0. \quad (2.21)$$

Будем последовательно вычислять суммы вида (2.21) для  $m = 1, 2, \dots$ . Сначала мы будем получать положительные, а потом отрицательные величины  $\sigma_m$ . Найдем такое  $m$ , что  $\sigma_m \geq 0$ , но  $\sigma_{m+1} < 0$ . В сумму  $\sigma_m$  войдут все положительные, все нулевые и часть отрицательных ляпуновских характеристических показателей. Если рассмотреть подпространство, образованное векторами возмущений, которые соответствуют первым  $m$  ляпуновским показателям, то в этом подпространстве объем облака изображающих точек ансамбля систем не уменьшается в процессе эволюции, в частности, возрастает при  $\sigma_m > 0$ . В то же время в подпространстве образованном векторами возмущений, которые соответствуют первым  $m + 1$  характеристическим показателям, объем облака изображающих точек будет уменьшаться при возрастании времени.

В 1979 году Каплан и Йорк [171, 172] предложили гипотезу, суть которой состоит в том, что фрактальная размерность аттрактора  $D_{Fr}$  расположена в интервале

$$m \leq D_{Fr} < m + 1$$

и состоит из целой  $m$  и некоторой дробной части  $d$ , так что

$$D_{Fr} = m + d.$$

Причем эта дробная часть размерности определяется из условия, что движение на аттракторе соответствует физическим представлениям о стационар-

ности процесса, а именно:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m + d\lambda_{m+1} = 0.$$

Отсюда получаем, что размерность аттрактора  $D_{Fr}$  определяется по формуле:

$$D_{Fr} = m + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|}. \quad (2.22)$$

Формула (2.22) сейчас называется формулой Каплана–Йорка.

В частном случае трехмерного фазового пространства упорядоченный спектр ЛХП странного аттрактора содержит три показателя,  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ , причем  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ , а  $\lambda_3 < 0$ . В силу условия диссипативности:  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$ . Поэтому  $\sigma_1 = \lambda_1 > 0$ ;  $\sigma_2 = \lambda_1 + 0 > 0$ ;  $\sigma_3 < 0$ . Следовательно, в трехмерном случае, формула (2.22) принимает вид:

$$D_{Fr} = 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|}. \quad (2.23)$$

Формула Каплана–Йорка используется, в первую очередь для подсчета фрактальных размерностей странных аттракторов, однако по ней легко могут быть рассчитаны размерности и регулярных аттракторов. Так, используя формулу (2.23), легко найдем, что в трехмерном пространстве размерность предельного цикла равна единице, а квазипериодического аттрактора – двум. Для положений равновесия формула Каплана–Йорка неприменима. Однако в этом случае размерность элементарно подсчитывается по общему определению Хаусдорфа [126] и всегда равна нулю.

Таким образом, в трехмерном фазовом пространстве фрактальные размерности возможных аттракторов непрерывной динамической системы равны:

1. для положений равновесия,  $D_{Fr} = 0$ ;
2. для предельных циклов,  $D_{Fr} = 1$ ;
3. для квазипериодических аттракторов,  $D_{Fr} = 2$ ;

4. для странных аттракторов,  $2 < D_{Fr} < 3$ .

Целость или дробность размерности  $D_{Fr}$  являются удобным признаком для идентификации регулярности или странности аттрактора.

Гипотеза Каплана–Йорка предполагала, что формула (2.22) позволяет вычислять хаусдорфову размерность аттракторов. Однако строго доказать это удалось только для хаотических аттракторов двумерных дискретных отображений и систем дифференциальных уравнений с размерностью фазового пространства  $n = 3$  [62]. В общем случае доказать гипотезу Каплана–Йорка пока не удастся. Большинство исследователей вообще склоняется к тому, что она неверна для многомерных систем.

В то же время формула (2.22) дает хорошую численную оценку размерности аттрактора. Поэтому размерность, определяемую по формуле (2.22), сейчас называют ляпуновской и считают еще одной разновидностью фрактальной размерности. Главное достоинство ляпуновской размерности в относительной простоте ее подсчета, для чего требуется только спектр ЛХП. Трудности, возникающие при подсчете фрактальной размерности исходя из определения Хаусдорфа, значительно превышают сложность нахождения спектра ЛХП.

В процессе вычисления ляпуновской размерности мы последовательно вычисляем суммы  $\sigma_m$ . Обозначим через  $h$  максимальное значение сумм  $\sigma_m$ . Величина  $h$  равна сумме всех положительных ляпуновских характеристических показателей аттрактора. Доказано, что  $h$  соответствует так называемой энтропии Колмогорова–Синяя [34, 62]. Очевидно, что для хаотических аттракторов величина  $h$  всегда положительна, для предельных циклов и квазипериодических аттракторов она равна нулю (так как в последних случаях положительные ляпуновские показатели отсутствуют). Таким образом, положительность энтропии является еще одним критерием хаоса. Заметим, что в теории вероятностей доказывалось, что для стационарных случайных процессов  $h = \infty$ . Поэтому по величине энтропии также можно идентифицировать, наблюдается ли в динамической системе стационарный случайный процесс



или детерминированный хаос.

## 2.6 Спектральная плотность и инвариантная мера

Вновь рассмотрим динамическую систему общего вида (2.2). Предположим, что система имеет аттрактор в виде предельного цикла, которому соответствует некоторое периодическое, с периодом  $T$ , решение  $\mathbf{x}(t)$ . Пусть вектор-функция  $\mathbf{x}(t)$  имеет компоненты

$$\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}, \quad (2.24)$$

где каждая из функций  $x_i(t)$  – периодическая, с периодом  $T$ . Как известно, периодическая функция  $x_i(t)$  может быть разложена в ряд Фурье:

$$x_i(t) = c_{0,i} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,i} \cos(k\omega_1 t - \varphi_{k,i}); \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.25)$$

где  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  – основная круговая частота  $\varphi_{k,i}$  – фаза. Из этой формулы видно, что каждая из периодических функций  $x_i(t)$  вполне определяется совокупностью величин  $c_{k,i}$ ,  $\varphi_{k,i}$ . Совокупность величин  $c_{k,i}$  носит название спектра амплитуд, а совокупность  $\varphi_{k,i}$  – спектра фаз функции  $x_i(t)$ . Для многих приложений достаточно знать только спектр амплитуд. Он применяется настолько часто, что когда говорят просто спектр, то имеют в виду амплитудный спектр. Спектр периодической функции очень просто изобразить графически. В декартовой системе координат  $O\omega c$  по оси абсцисс откладываются частоты  $\omega = k\omega_1$ , а по оси ординат – амплитуды  $c = c_{k,i}$ . Затем точки с координатами  $(k\omega_1; 0)$  и  $(k\omega_1; c_{k,i})$  соединяются отрезками прямых, которые называются спектральными линиями. В результате каждой гармонике разложения в ряд Фурье (2.25) будет соответствовать вполне определенная спектральная линия. Мы получим спектр состоящий из равноудаленных спектральных линий. Причем частоты гармоник находятся в простых кратных соотношениях. Такой спектр называется дискретным гармоническим спектром [102].

Заметим, что для всех компонент вектор–функции (2.24) мы получим дискретные гармонические спектры, спектральные линии которых имеют одинаковые частоты и отличаются только высотой. Поэтому, для качественного изучения спектра достаточно ограничиться построением спектра одной из компонент вектор–функции. Как правило, на практике спектральные свойства многомерных динамических систем изучаются на примере одной из компонент вектор–функции состояния, что существенно упрощает задачу, но в то же время позволяет исследовать характерные особенности получаемых спектров.

Теперь пусть исходная динамическая система (2.2) имеет квазипериодический аттрактор. В этом случае решение системы  $\mathbf{x}(t)$ , соответствующее аттрактору, будет квазипериодической вектор–функцией. Будем изучать спектральные характеристики аттрактора при помощи одной из компонент  $\mathbf{x}(t)$ , которую обозначим, опуская индекс, через  $x(t)$ . Квазипериодическая функция  $x(t)$  может быть записана в виде:

$$x(t) = x(\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_p(t)), \quad (2.26)$$

где функция  $x(\psi)$  имеет период  $2\pi$  по каждому из аргументов  $\psi_i$  и между частотами  $\omega_i$  не существует рациональных соотношений. Используя разложение функции (2.26) в обобщенный ряд Фурье, можно показать, что в этом случае спектр представляется в виде дискретной совокупности спектральных линий [102]. Однако, в отличие от периодического случая, эти линии не равноудалены, а располагаются на частотах, которые представляют собой линейные комбинации базовых частот:

$$\omega_{k_1, \dots, k_p} = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_p\omega_p.$$

Предположим, что исходная система имеет странный аттрактор, одна из траекторий которого  $\mathbf{x}(t)$ . Спектральные свойства будем изучать при помощи одной из компонент вектор–функции  $\mathbf{x}(t)$ , которую обозначим через  $x(t)$ . В этом случае функция  $x(t)$  будет непериодической, поэтому вместо разложения в ряд Фурье необходимо пользоваться интегралом Фурье. Напомним,

что для непериодической функции имеют место следующие соотношения:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.27)$$

где

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.28)$$

Формулы (2.27) и (2.28) являются основными формулами теории спектров. Смысл формулы (2.27) состоит в том, что функция  $x(t)$  представляется суммой бесконечно большого числа бесконечно малых колебаний, которые как угодно близки по частоте. Комплексная амплитуда  $C$  каждого отдельного колебания бесконечно мала и равняется:

$$dC = \frac{1}{\pi} S(\omega) d\omega. \quad (2.29)$$

Частотный интервал между двумя соседними колебаниями также бесконечно мал. Он равняется  $d\omega$ .

Величина  $S(\omega)$  называется комплексным спектром непериодической функции, а ее модуль  $\Phi(\omega) = |S(\omega)|$  просто спектром. В этом случае интервалы между отдельными спектральными линиями неограниченно сокращаются и спектр может быть представлен непрерывной линией, огибающей семейства спектральных линий. Такого рода спектр называется сплошным (непрерывным).

Так как из формулы (2.29) следует, что

$$S(\omega) = \pi \frac{dC}{d\omega},$$

то величина  $S(\omega)$  выражает не непосредственно амплитуду, а так называемую спектральную плотность. Поэтому такой спектр называется спектром плотности колебаний или Фурье-спектром.

Построение Фурье-спектров для аттракторов конкретных динамических систем вызывает некоторые трудности, так как часто неизвестна аналитическая запись решения динамической системы, соответствующего тем или

иным траекториям аттрактора. Кроме того, при построении спектра могут возникнуть проблемы при вычислении интеграла Фурье на бесконечном промежутке. Поэтому поступают следующим образом. Численным методом находится какая-нибудь типичная траектория аттрактора. Далее построение спектра аттрактора, независимо от того регулярный он или странный, проводится при помощи преобразования Фурье (2.28). При этом интегрирование проводится на промежутке:

$$S(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} x(t)e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.30)$$

где  $t_0$  - длительность переходного процесса (то есть время за которое траектория, стартующая в начальный момент времени  $t = 0$ , выходит на аттрактор),  $t_1$  - некоторый, разумно выбранный момент времени, в который мы прекращаем интегрирование. Естественно, проинтегрировать (2.30) мы сможем только численно, применив один из приближенных методов интегрирования. Если траектория принадлежит предельному циклу или квазипериодическому аттрактору, то можно применить сравнительно простой метод Симпсона. Если же траектория принадлежит странному аттрактору или аттрактору, который мы проверяем на "странность", то целесообразно применять более громоздкий, но и значительно более точный метод Файлона [157].

Какие же Фурье-спектры мы получим для разных типов аттракторов? Если аттрактор является предельным циклом, то спектральная плотность имеет вид, качественно подобный приведенному на рис.2.8а. По оси абсцисс отложена частота, а по оси ординат  $Sp = \lg |S(\omega)|$ . Спектр будет представлять собой непрерывную линию с четкими локальными максимумами в точках  $\omega = k\omega_1$ . Логарифмическое масштабирование по оси ординат здесь применяется с целью уменьшения размеров графика. При  $t_1 \rightarrow +\infty$  значения максимумов могут несколько изменяться. Признаком оптимальности выбора значения  $t_1$  будет прекращение изменения величин  $Sp$  с точностью до определенного числа знаков после десятичной точки.

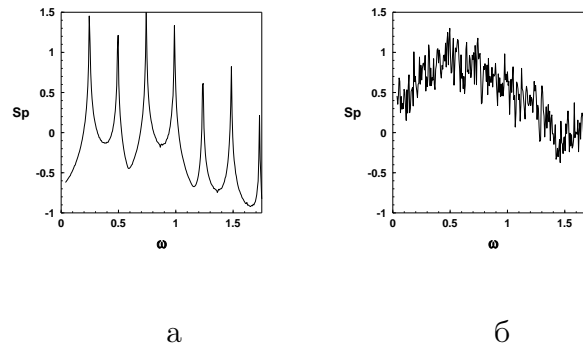


Рис. 2.8: Типичные распределения спектральной плотности для предельного цикла (а) и хаотического аттрактора (б).

Если траектория принадлежит квазипериодическому аттрактору, то внешний вид типичного Фурье–спектра, на первый взгляд, будет подобен приведенному на рис.2.8а. То есть также будем иметь непрерывную линию с четкими максимумами (пиками). Но по оси абсцисс эти пики будут не равноудаленными, а размещаться в точках, которые представляют собой линейную комбинацию рационально несоизмеримых частот тора.

Наконец, если траектория принадлежит странному аттрактору, то имеет место большое разнообразие в видах Фурье–спектра. Возможный вид спектра странного аттрактора приведен на рис.2.8б. В отличие от регулярных аттракторов, которые имеют дискретный спектр, спектр странного аттрактора сплошной (непрерывный). Таким образом, наличие у аттрактора сплошного Фурье–спектра может служить еще одним признаком того, что аттрактор странный.

В заключение главы кратко познакомимся с понятием инвариантной меры аттрактора. Пусть мы имеем ансамбль идентичных динамических систем вида (2.2), которые отличаются только начальными условиями, и пускай  $D$  – некоторая ограниченная область фазового пространства. Этой области припишем меру  $\mu(D)$ , которая равна относительному числу представителей ансамбля, состояния которых принадлежат области  $D$ . Объединение непересекающихся областей  $D_1, \dots, D_n$  будет иметь меру, равную сумме мер этих

областей

$$\mu(D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n) = \mu(D_1) + \mu(D_2) + \dots + \mu(D_n).$$

В силу динамики индивидуальных систем, которые составляют ансамбль, приписанная разным подмножествам фазового пространства мера будет, вообще говоря, изменяться с течением времени. Предположим, что начальное распределение изображающих точек специально подобрано так, что мера любого измеримого подмножества, расположение которого в фазовом пространстве фиксировано, все время остается неизменной. Соответствующая мера называется инвариантной мерой для динамической системы, которая фигурирует в качестве индивидуального элемента ансамбля.

Если динамика системы регулярна и протекает в ограниченной области фазового пространства, то инвариантная мера всегда существует (теорема Крылова – Боголюбова) [62]. Более того, инвариантных мер может быть много. Но среди всех инвариантных мер основной интерес представляет естественная инвариантная мера или мера Крылова – Боголюбова. Предположим, что начальная точка динамической системы принадлежит бассейну притяжения некоторого интересующего нас аттрактора. Для произвольной области  $D$  меру  $\mu(D)$  определим в соответствии с соотношением:

$$\mu(D) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau(D, \mathbf{x}_0, T)}{T}, \quad (2.31)$$

где  $\mathbf{x}_0$  – точка старта фазовой траектории,  $\tau(D, \mathbf{x}_0, T)$  – время нахождения изображающей точки в области  $D$  при наблюдении за интервал времени  $T$ . Если введенная таким образом мера оказывается одной и той же почти при любом выборе начальной точки, то это и будет инвариантная мера.

Математические доказательства, которые относятся к общим свойствам хаотических аттракторов, как правило, исходят из предположения о наличии однозначно определенной естественной меры. Однако до настоящего времени строго доказать существование естественной инвариантной меры для большинства полученных в прикладных задачах странных аттракторов не уда-

ется. Тем не менее численно построенные инвариантные меры часто бывают очень полезны при изучении хаотического поведения динамических систем.

Вкратце остановимся на практическом алгоритме построения природной инвариантной меры аттрактора. Сперва мы численно строим какую-либо траекторию, принадлежащую аттрактору, и запоминаем массив ее значений фазовых координат. Далее строим интересующую нас проекцию фазового портрета на экране компьютера, используя полученный массив фазовых точек. При этом применяем технику кодирования изображения оттенками какого-нибудь заранее определенного цвета, например, черного или красного [62]. Последовательно выводим на экран фазовые точки, причем при попадании в определенный пиксель экрана нескольких точек пропорционально их количеству увеличиваем цифровой код яркости данного пикселя. При достаточно большом количестве точек в массиве координат фазовой траектории мы получим проекцию фазового портрета, одни части которой будут изображены более ярко, чем другие. Яркие части фазового портрета соответствуют тем областям, в которые изображающая точка попадает чаще, а более темные – областям куда изображающая точка попадает реже. Таким образом, мы практически получим проекции распределения естественной инвариантной меры по фазовому портрету аттрактора. Такие распределения бывают очень полезными при изучении сценариев перехода к хаосу.

## Глава 3

# Хаос в маятниковых системах

### 3.1 Введение

Маятниковые системы на протяжении столетий постоянно привлекают к себе внимание исследователей в различных областях математики, механики и физики. Эти системы являются классическим примером колебательных динамических систем. В маятниковых системах были обнаружены такие фундаментальные эффекты, как параметрический резонанс [150, 173, 214], высокочастотная стабилизация неустойчивых положений равновесия [12, 19, 32, 70, 100, 149] и множество других. Эти системы были своеобразным полигоном, на котором проходили прикладную проверку многие абстрактные теоретические результаты, полученные в качественной теории динамических систем [2, 10, 80].

Маятниковые системы чрезвычайно просты по своей физической природе и легко позволяют проводить экспериментальную проверку различных, теоретически обнаруженных, колебательных эффектов. Однако в большей степени, интерес к исследованию различных аспектов динамического поведения маятниковых систем объясняется тем, что многие эффекты и явления, впервые обнаруженные в маятниковых системах, впоследствии были установлены и для систем значительно более сложной физической природы, таких как кольца, оболочки, пластины, различные среды в цилиндрических и сферических полостях. Более того, различные маятниковые систе-



мы стали с успехом применяться для приближенного математического моделирования динамики вышеперечисленных сложных колебательных систем [9, 31, 51, 53, 55, 56, 65, 141, 145, 182, 192, 201, 203, 204, 206]. При этом упрощаются, иногда достаточно существенно, получаемые дифференциальные уравнения движения, но остается достаточно точным описание динамики этих сложных колебательных систем. Например, применение процедуры Бубнова–Галеркина при описании колебаний свободной поверхности жидкости в топливных баках позволяет исследование системы уравнений в частных производных заменить исследованием более простой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. А знание особенностей динамики маятниковых моделей позволяет предугадать динамику распределенных систем. Кроме того, такой подход позволяет дорогостоящие натурные испытания заменить простыми лабораторными экспериментами.

В последнее время значительно расширилась область применения маятниковых моделей для математического описания колебательных процессов. Такие модели стали широко применяться при исследовании динамического поведения систем самой разнообразной природы в биологии, медицине, экономике и социологии [5].

Подавляющее большинство исследований динамики маятниковых систем проводится без учета ограниченности мощности источника возбуждения колебаний. При такой идеализации источника возбуждения предполагается, что он имеет неограниченную мощность. Поэтому при математическом моделировании таких систем обратное влияние колебательной системы на функционирование источника возбуждения колебаний исключают из рассмотрения, считая, что это влияние пренебрежимо мало. Такой подход и широкое использование различных методов редукции позволяет понизить порядок динамических систем, применяемых для исследования колебаний маятников. Однако, во многих случаях, такая идеализация приводит к значительным ошибкам в качественном и количественном описании динамических режимов маятниковых систем. Так, устойчивые по Ляпуно-

ву при теоретических расчетах режимы могут оказаться неустойчивыми при проведении натурных экспериментов. Вместо ожидаемых периодических режимов в эксперименте обнаруживаются положения равновесия и наоборот [37, 40, 44, 47, 54, 108, 179, 181, 186, 232].

Мировоззренческий переворот, которым явилось открытие детерминированного хаоса в динамических системах, существенно расширил представление о возможных установившихся колебательных режимах в маятниковых системах. Становится совершенно очевидной, во многих случаях, порочность идеализации источников возбуждения и особенно применение различных методов редукции. Качественно различные методы редукции предполагают замену исследований динамики произвольной исходной системы на исследование динамики ряда подсистем, на которые каким-либо способом расщепляется исходная система. При этом уменьшается размерность фазовых пространств получаемых подсистем. Платой за такое упрощение исходной системы может служить полная потеря информации о возможных хаотических аттракторах исходной системы. Это происходит во всех случаях, когда фазовая размерность редуцированных подсистем меньше или равна двум. Если минимальная фазовая размерность редуцированных подсистем равна трем, мы можем обнаружить некоторые хаотические аттракторы, существующие в исходной системе, но при этом возможна утрата информации о гиперхаотических аттракторах исходной системы. Напомним, что минимальная фазовая размерность, при которой возможно существование гиперхаотического аттрактора, равна четырем.

Фактически своеобразным редуцированием исходной маятниковой системы является пренебрежение взаимодействием между этой системой и каким-либо источником возбуждения колебаний. При этом неважно, на каком основании, то ли неограниченностью мощности источника возбуждения, то ли малостью коэффициентов взаимосвязи между маятником и источником возбуждения. Выплескивание такой "воды" (взаимосвязи между маятником и источником) приводит к выплескиванию "ребенка" (полной потере инфор-

мации о хаотических режимах взаимодействия). Поэтому совершенно ясно, что открытие детерминированного хаоса заставляет отказаться от применения методов редукции при полноценном исследовании типов динамических режимов различных колебательных систем.

## 3.2 Плоский физический маятник

### 3.2.1 Уравнения движения и устойчивость положений равновесия

Наиболее простым примером маятниковой системы является плоский физический маятник, точка подвеса которого возбуждается электродвигателем ограниченной мощности. Рассмотрим такую систему, схема которой представлена на рис. 3.1

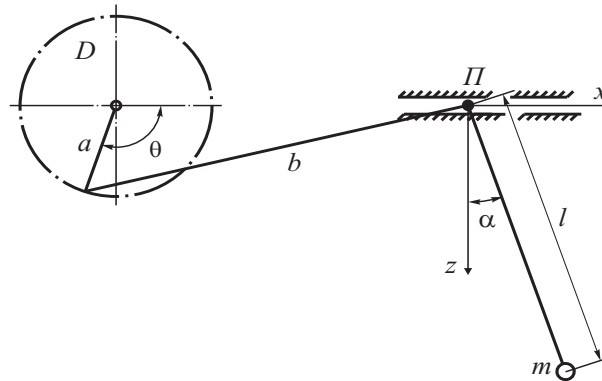


Рис. 3.1: Схема рассматриваемой системы.

Кривошипно-шатунный механизм через шатун  $b$  соединен с подвесом физического маятника. Когда кривошип  $a$  перемещается на угол  $\Theta$ , ползун совместно с подвесом получает перемещение вида  $u(t) = a[\cos \Theta + 0.25a_1(1 + \cos 2\Theta)]$ , где  $a_1 = \frac{a}{b}$ . Для описания колебаний маятника используем декартову систему координат  $Oxz$ . Тогда кинетическая энергия всей системы, считая массу ползуна пренебрежимо малой, имеет вид [37, 49, 181, 199, 201]

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{u} + \dot{x})^2 + \dot{z}^2], \quad (3.1)$$

а потенциальная

$$V = mg(l - z), \quad (3.2)$$

где  $I$ - момент инерции ротора электродвигателя;  $m$ - масса маятника;  $l$ - приведенная длина маятника. Обозначим через  $\alpha$  угол отклонения маятника от оси  $z$ , тогда  $x = l \sin \alpha$ ,  $z = l \cos \alpha$ . Предположим, что  $\frac{a}{b} \ll 1$ . Разлагая, для малых углов  $\alpha$ , функции (3.1-3.2) в ряд Тейлора получим :

$$T \simeq \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2 \left[ \frac{a^2}{l^2}\dot{\Theta}^2 \sin^2 \Theta - 2\frac{a}{l}\dot{\alpha}\dot{\Theta} \sin \Theta + \frac{a}{l}\dot{\alpha}\alpha^2\dot{\Theta} \sin \Theta + \dot{\alpha}^2 \right];$$

$$V \simeq mgl \left( \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{24} \right).$$
(3.3)

Далее, используя разложения (3.3), получим следующие уравнения движения исходной системы (уравнения Лагранжа) [49, 114, 120, 176, 181]:

$$I\ddot{\Theta} = L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) + mla \left[ \ddot{\alpha} - \frac{1}{2}(\ddot{\alpha}\alpha^2 + 2\dot{\alpha}^2\alpha) - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{l}(\ddot{\Theta} \sin \Theta + \dot{\Theta}^2 \cos \Theta) \right] \sin \Theta,$$

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha + \delta \dot{\alpha} - \frac{\omega_0^2}{6} \alpha^3 + \frac{a}{l} \frac{\alpha^2}{2} (\ddot{\Theta} \sin \Theta + \dot{\Theta}^2 \cos \Theta) =$$

$$= \frac{a}{l} (\ddot{\Theta} \sin \Theta + \dot{\Theta}^2 \cos \Theta).$$
(3.4)

Здесь  $L(\dot{\Theta})$ - движущий момент возбудителя;  $H(\dot{\Theta})$ - внутренний момент сил сопротивления вращению ротора двигателя;  $\omega_0 = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$ - собственная частота маятника;  $\delta$ - коэффициент демпфирования силы сопротивления среды, в которой движется маятник.

Нелинейная система уравнений (3.4) является детерминированной и описывает процесс возбуждения колебаний маятника электродвигателем. Введем малый параметр  $\varepsilon = \frac{a}{l}$ , то есть предположим, что длина кривошипа  $a$  намного меньше длины  $l$ . Кроме того, предположим, что реализуются условия резонансного взаимодействия возбудителя и маятника, когда скорость  $\dot{\Theta}$  близка к собственной частоте маятника  $\omega_0$  :

$$\dot{\Theta}(t) = \omega_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\omega_0\nu.$$
(3.5)

Следуя [49, 114, 181, 199, 201], нелинейные колебания маятника будем

ОТЫСКИВАТЬ В ВИДЕ:

$$\alpha(t) = \varepsilon^{1/3}[y_1(\tau) \cos \Theta(t) + y_2(\tau) \sin \Theta(t)],$$

где  $\tau = \frac{\varepsilon^{2/3}\Theta(t)}{2}$  — медленное время.

После проведения процедуры усреднения по быстрому времени  $\Theta(t)$  (детально описанной в [13, 37, 199, 201]) и использования дополнительного соотношения вида

$$\dot{\alpha}(t) = \varepsilon^{1/3}\dot{\Theta}[-y_1(\tau) \sin \Theta + y_2(\tau) \cos \Theta]$$

для новых переменных  $y_1(\tau)$  и  $y_2(\tau)$  получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(\tau)}{dt} &= -\frac{\varepsilon^{2/3}}{\dot{\Theta}} \left[ \frac{\eta}{2} y_1 \omega_0 \dot{\Theta} + \frac{\nu}{2} \omega_0^2 y_2 + \frac{\omega_0^2}{2 \cdot 8} (y_1^2 y_2 + y_2^2) \right] + \varepsilon^{4/3} \{ \dots \}; \\ \frac{dy_2(\tau)}{dt} &= \frac{\varepsilon^{2/3}}{\dot{\Theta}} \left[ -\frac{\eta}{2} y_2 \omega_0 \dot{\Theta} + \frac{1}{2} \dot{\Theta} + \frac{\nu}{2} \omega_0^2 y_1 + \frac{\omega_0^2}{16} (y_1^3 + y_1 y_2^2) \right] + \varepsilon^{4/3} \{ \dots \}, \end{aligned}$$

где  $\eta = \delta \varepsilon^{-2/3} \omega_0^{-1}$ . Переходя к производным по медленному времени, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= -\eta y_1 - \nu y_2 - \frac{1}{8} (y_1^2 y_2 + y_2^3); \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= -\eta y_2 + \nu y_1 + \frac{1}{8} (y_1^3 + y_1 y_2^2) + 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для рассмотрения установившихся режимов взаимодействия между маятником и возбудителем в качестве  $L(\dot{\Theta})$  используем статическую характеристику возбудителя [37, 47], причем считаем, что  $\frac{L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta})}{I} = \frac{2\varepsilon^{2/3}}{\omega_0} M(\dot{\Theta})$ . Для описания вращения вала двигателя введем новую переменную  $\dot{\Theta}(t) = \Omega(\tau)$ , которая удовлетворяет согласно (3.4) следующему усредненному по быстрому времени уравнению:

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = M(\Omega) - \mu y_2 + \varepsilon^{2/3} \{ \dots \}, \tag{3.7}$$

где

$$\mu = \frac{ma^{2/3}l^{4/3}\omega_0}{I}. \tag{3.8}$$

Аппроксимируем статическую характеристику двигателя линейной функцией вида [37]:  $M(\Omega) = N_0 + E\Omega$ , где  $N_0$  и  $E$  — постоянные, причем  $E < 0$ .

Такое представление статической характеристики описывает ее падающий участок, а параметр  $E$  определяет угол наклона этого участка. На основании принятой аппроксимации и соотношения (3.5) уравнение (3.7) преобразуем в уравнение относительно расстройки частот  $\nu(\tau)$

$$\frac{d\nu}{d\tau} = F + E\nu + Dy_2. \quad (3.9)$$

Здесь

$$D = -\frac{2ml^2}{I}; F = \frac{2l^{2/3}}{a^{2/3}}\left(\frac{N_0}{\omega_0} + E\right). \quad (3.10)$$

Для удобства ещё примем обозначения  $\nu = y_3, \eta = -C$ . Заметим, что  $C \leq 0$ , так как  $\varepsilon > 0, \omega_0 > 0$ , а  $\delta \geq 0$ . Таким образом, процесс взаимодействия колебаний маятника и вращения вала двигателя описывается системой трех нелинейных уравнений [49, 114, 120, 176, 181]:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= Cy_1 - y_2y_3 - \frac{1}{8}(y_1^2y_2 + y_2^3), \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= Cy_2 + y_1y_3 + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1y_2^2) + 1, \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= Dy_2 + Ey_3 + F. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Система уравнений (3.11) явно содержит четыре управляющих параметра  $(C, D, E, F)$ , при изменении которых в ней реализуется тот или иной динамический режим. Заметим, что один из этих параметров ( $E$ ) непосредственно задается углом наклона характеристики двигателя, второй ( $C$ ) — пропорционален сопротивлению среды, а остальные два определяются по формулам (3.10). Как видно из этих формул, параметры  $D, F$  зависят от длины и массы маятника, его собственной частоты, коэффициента демпфирования, линейных размеров кривошипно-шатунного механизма, момента инерции ротора и также от параметров статической характеристики электродвигателя. То есть фактически данные параметры являются мультипараметрами динамической системы (3.11).

Обозначим через  $Vf$  векторное поле, порождаемое правой частью системы (3.11). Тогда дивергенция этой системы может быть определена по формуле

$$\operatorname{div} Vf = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial y_3} = 2C + E. \quad (3.12)$$

Следовательно, дивергенция системы постоянна и отрицательна, так как  $C < 0$  и  $E < 0$ . Поэтому система (3.11) является диссипативной, вследствие чего все аттракторы этой системы, как регулярные, так и хаотические, являются подмножествами нулевого фазового объема, расположенными в ограниченной области фазового пространства.

Исследование системы (3.11) начнем с получения условий асимптотической устойчивости ее положений равновесия. Все положения равновесия системы (3.11) являются решениями следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} Cy_1 - y_2y_3 - \frac{1}{8}(y_1^2y_2 + y_2^3) &= 0, \\ Cy_2 + y_1y_3 + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1y_2^2) + 1 &= 0, \\ Dy_2 + Ey_3 + F &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В общем случае эти решения могут быть найдены только численно.

Предположим, что  $y_1 = y_{10}$ ,  $y_2 = y_{20}$ ,  $y_3 = y_{30}$  — одно из решений системы (3.13). Тогда соответствующая система уравнений в вариациях имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_1 &= (C - \frac{1}{4}y_{10}y_{20})\tilde{y}_1 - (\frac{3}{8}y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{10}^2)\tilde{y}_2 - y_{20}\tilde{y}_3, \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= (\frac{3}{8}y_{10}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{20}^2)\tilde{y}_1 + (C + \frac{1}{4}y_{10}y_{20})\tilde{y}_2 + y_{10}\tilde{y}_3, \\ \dot{\tilde{y}}_3 &= D\tilde{y}_2 + E\tilde{y}_3. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Применяя критерий Гурвица, получим следующие достаточные условия асимптотической устойчивости положений равновесия системы (3.11) [114, 120]:

$$2C + E < 0, \quad (3.15)$$

$$C^2 - \frac{1}{16}y_{10}^2y_{20}^2 + 2C - y_{10}D + (\frac{3}{8}y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{10}^2)(\frac{3}{8}y_{10}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{20}^2) > 0, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
& [(\frac{3}{8}y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{10}^2)(\frac{3}{8}y_{10}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{20}^2) - \frac{1}{16}y_{10}^2y_{20}^2 + C^2]E - \\
& - [(C - \frac{1}{4}y_{10}y_{20})y_{10} - (\frac{3}{8}y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{10}^2)y_{20}]D < 0,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& (2C + E)[C^2 - \frac{1}{16}y_{10}^2y_{20}^2 + 2C - y_{10}D + \\
& + (\frac{3}{8}y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{10}^2)(\frac{3}{8}y_{10}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{20}^2)] + \\
& + [\frac{1}{16}y_{10}^2y_{20}^2 - (\frac{3}{8}y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{10}^2)(\frac{3}{8}y_{10}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{20}^2) - C^2]E + \\
& + [(C - \frac{1}{4}y_{10}y_{20})y_{10} - (\frac{3}{8}y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{10}^2)y_{20}]D < 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Заметим, что условие устойчивости (3.15) всегда выполняется в силу диссипативности системы (3.11).

Полученные условия очень громоздкие, однако они позволяют, создавая соответствующие компьютерные программы, проследить влияние параметров системы (3.11) на устойчивость положений равновесия. Так как основной целью работы является обнаружение хаотических установившихся режимов системы (3.11), не будем останавливаться на детальном изучении устойчивости положений равновесия.

### 3.2.2 Исследование хаотических режимов

Перейдем к исследованию установившихся решений системы уравнений (3.11). Эта система является полностью детерминированной, нелинейной системой дифференциальных уравнений с трехмерным фазовым пространством. Поэтому существует теоретическая возможность возникновения в системе (3.11) хаотических аттракторов [5, 62, 74]. Изучим влияние параметров этой системы на возникновение, развитие и исчезновение в ней детерминированного хаоса. При этом при доказательстве существования хаотических режимов у системы (3.11) применим комплексный подход. Он будет состоять в том, что для подтверждения факта хаотичности (регулярности) того или иного аттрактора системы мы детально изучим целый ряд количественных и



качественных характеристик аттрактора, а не ограничимся одной, двумя характеристиками. Далее в этой главе будут подробно анализироваться такие характеристики аттракторов системы (3.11), как фазовые портреты, сечения и отображения Пуанкаре, распределения естественной инвариантной меры и спектральной плотности, спектры ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) и фазопараметрические характеристики.

Так как данная система является нелинейной, то для построения ее решений приходится использовать численные методы. Остановимся на методике применения различных численных методов и алгоритмов для построения различных характеристик системы (3.11). Заметим, что эта методика применяется и в других главах. Итак, для построения фазовых портретов системы применяется метод Рунге–Кутты четвертого или пятого порядка с переменным шагом численного интегрирования, причем для расчета длины переменного шага используется корректирующая процедура Дормана–Принса [148, 101]. Такой метод позволяет обеспечить достаточно высокую точность проводимых вычислений. Так, локальная погрешность этого метода может достигать величин порядка  $O(10^{-12})$ – $O(10^{-15})$ . Вышеупомянутый метод является основой далее описанных методов построения других характеристик системы (3.11).

Для построения сечений и отображений Пуанкаре используется, описанный в п.2.4, метод Эно [5, 167], который применяется также для построения фазопараметрических характеристик системы (бифуркационных деревьев). Расчет спектра ЛХП проводится при помощи алгоритма Бенеттина и др. [137, 138, 139], особенности применения которого для систем дифференциальных уравнений описаны в п.2.3. При построении распределений спектральной плотности (Фурье–спектров) используется метод Файлона [157]. Наконец, при получении распределений естественных инвариантных мер применяется техника кодировки оттенками черного цвета [62], описание которой приведено в п.2.6.

Для компьютерной реализации перечисленных выше методов и алгорит-

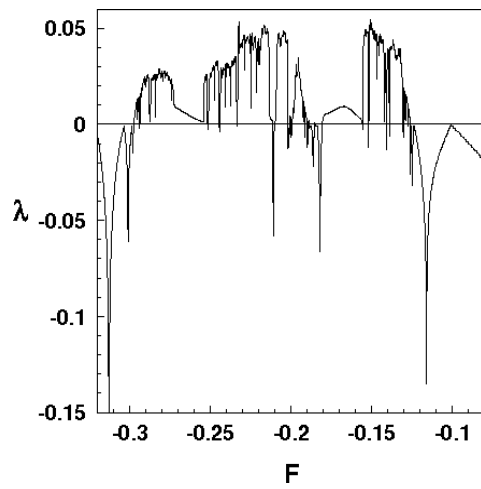
мов разработана соответствующая методика и создан пакет прикладных программ, записанных на языке программирования FORTRAN. Данный пакет пригоден для реализации на любом современном персональном компьютере. Необходимым условием является установка на компьютере программного обеспечения Fortran Power Station (разработка Microsoft Developer Studio). Никаких особых требований к объему оперативной памяти компьютера не предъявляется. Достаточным является объем оперативной памяти в 256 кб. С целью обеспечения достаточной скорости проведения компьютерных вычислений, тактовая частота процессора компьютера должна быть не менее 1 ГГц. Разработанный программный пакет достаточно прост и удобен для применения и не требует от пользователя высокого уровня компьютерной грамотности.

При проведении численных расчетов полагалось, что параметры системы равны:  $C = -0.1$ ,  $D = -0.5$ , а исходные начальные условия имеют вид

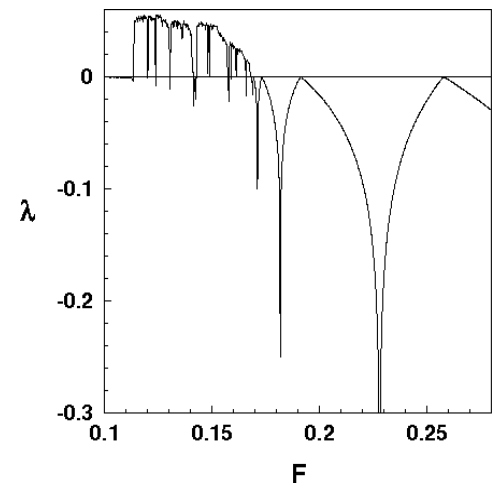
$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0.$$

Заметим, что с целью исключения влияния нетипичных фазовых траекторий при расчетах проводилась вариация исходных начальных условий в некоторой окрестности нуля (см. п. 2.3), хотя детальное построение бассейнов притяжения аттракторов системы при этом не проводилось. Параметры  $E$ ,  $F$  рассматривались как бифуркационные и были переменными при расчетах.

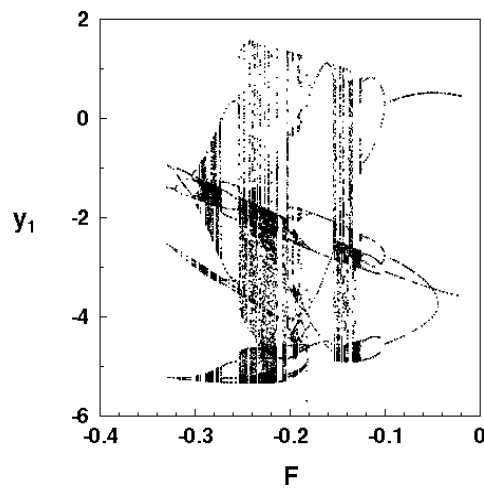
Первоначально предположим, что  $E = -0.61$ , а  $F$  изменяется на сегменте  $-0.31 \leq F \leq 0.28$ . На рис. 3.2 а–б приведены зависимости старшего, отличного от нуля, ляпуновского характеристического показателя системы (3.11) от значений параметра  $F$  [120]. Как уже упоминалось ранее в главе 2, наличие в спектре ЛХП положительного показателя является основным практическим критерием существования у системы хаотического аттрактора. Как видно из рис. 3.2 а–б, существует несколько интервалов изменения  $F$ , в которых система (3.11) имеет положительный ляпуновский показатель. Следовательно, в этих интервалах у данной системы существуют хаотические



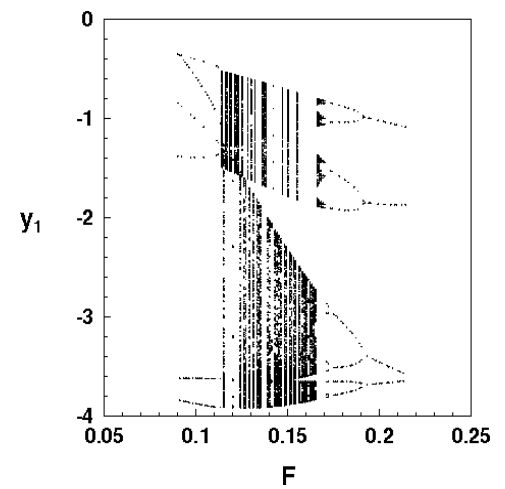
а



б



в



г

Рис. 3.2: Зависимость старшего ляпуновского характеристического показателя от  $F$  (а)–(б) и фазопараметрические характеристики системы (в)–(г).

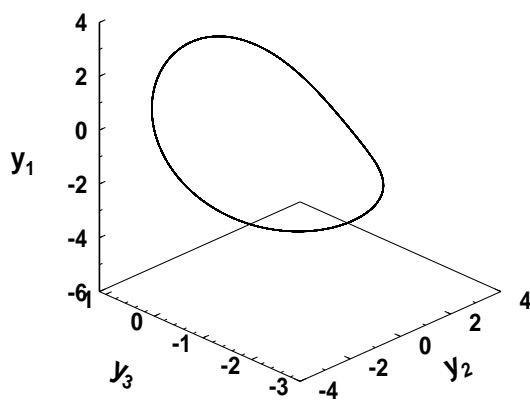
аттракторы.

На рис. 3.2 в.–г. приведены фазопараметрические характеристики системы (так называемые бифуркационные деревья), построенные при тех же границах изменения параметра  $F$  [120]. Эти характеристики построены относительно координаты  $y_1$ . Фазопараметрические характеристики относительно других координат системы качественно подобны приведенной на рис. 3.2. Интервалам изменения параметра  $F$ , в которых расположены отдельные ветви "кроны" бифуркационного дерева, соответствуют периодические режимы

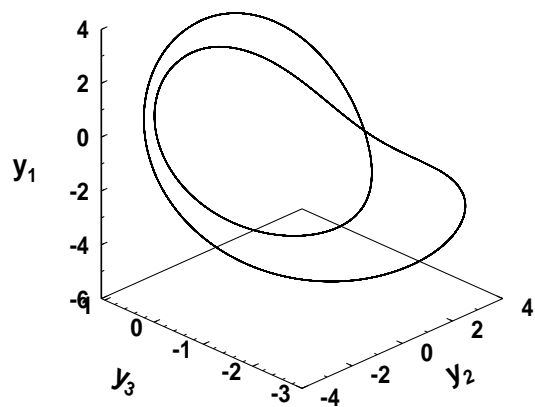
установившихся колебаний системы (3.11), а интервалам, в которых "крона" изображается насыщенно черным цветом, из-за слияния десятков тысяч отдельных ветвей, соответствуют хаотические режимы. При внимательном рассмотрении этого рисунка видны точки бифуркации как регулярных режимов, так и точки бифуркации, при прохождении которых происходит смена регулярного периодического режима на нерегулярный, хаотический.

Рассмотрим эти качественные изменения типов режимов установившихся колебаний более детально [120]. При  $F = 0.28$  в системе (3.11) существует предельный цикл, довольно простой, 1-тактовой структуры. При  $F = 0.2576$  данный цикл теряет устойчивость и в системе происходит первая бифуркация удвоения периода. В результате этой бифуркации возникает устойчивый 2-тактный предельный цикл, период которого в два раза больше периода предыдущего цикла. Затем при  $F = 0.1912$  в системе происходит вторая бифуркация удвоения периода, в результате которой теряет устойчивость 2-тактный предельный цикл и возникает устойчивый 4-тактный предельный цикл, чей период в два раза больше периода предыдущего цикла. Третья и четвертая бифуркации удвоения периода происходят, соответственно, при  $F = 0.173$  и  $F = 0.1692$ , в результате чего возникают 8 и 16-тактные циклы. Этот бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода приводит к возникновению в системе хаотического аттрактора при  $F = 0.1674$ . На рис. 3.3 показан исходный предельный цикл и три первых бифуркации удвоения периода, а на рис. 3.4 четвертая бифуркация удвоения и хаотический аттрактор. Возникший хаотический аттрактор имеет спиральную структуру.

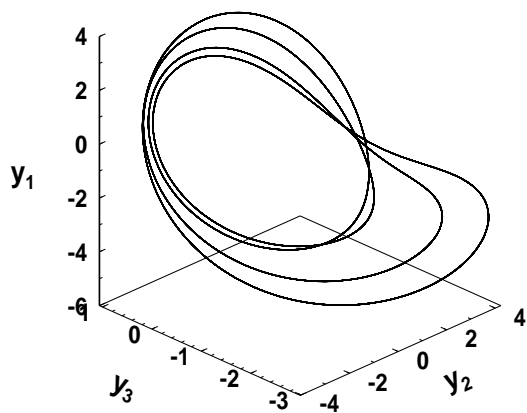
На приведенных рисунках четко видны удвоения тактности предельных циклов. Отметим, что фазовые портреты предельных циклов, соответствующих большим по порядковому номеру бифуркациям удвоения, и хаотического аттрактора внешне будут очень похожими друг на друга. Однако между ними есть целый ряд существенных отличий, одно из которых состоит в следующем. Изображающая точка траектории цикла всегда возвращается в любую, как угодно малую, окрестность цикла через время, строго равное периоду



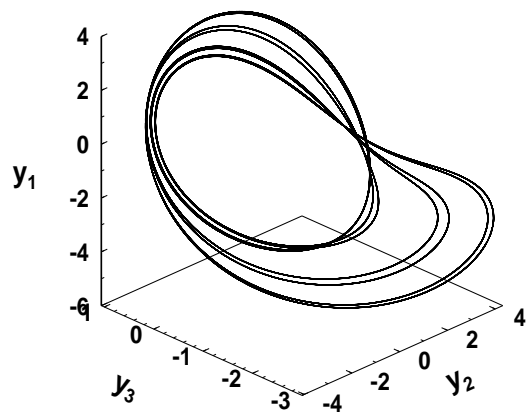
а



б



в



г

Рис. 3.3: Предельный цикл и первые три бифуркации удвоения периода при  $F = 0.258$  (а),  $F = 0.192$  (б),  $F = 0.174$  (в) и  $F = 0.171$  (г).

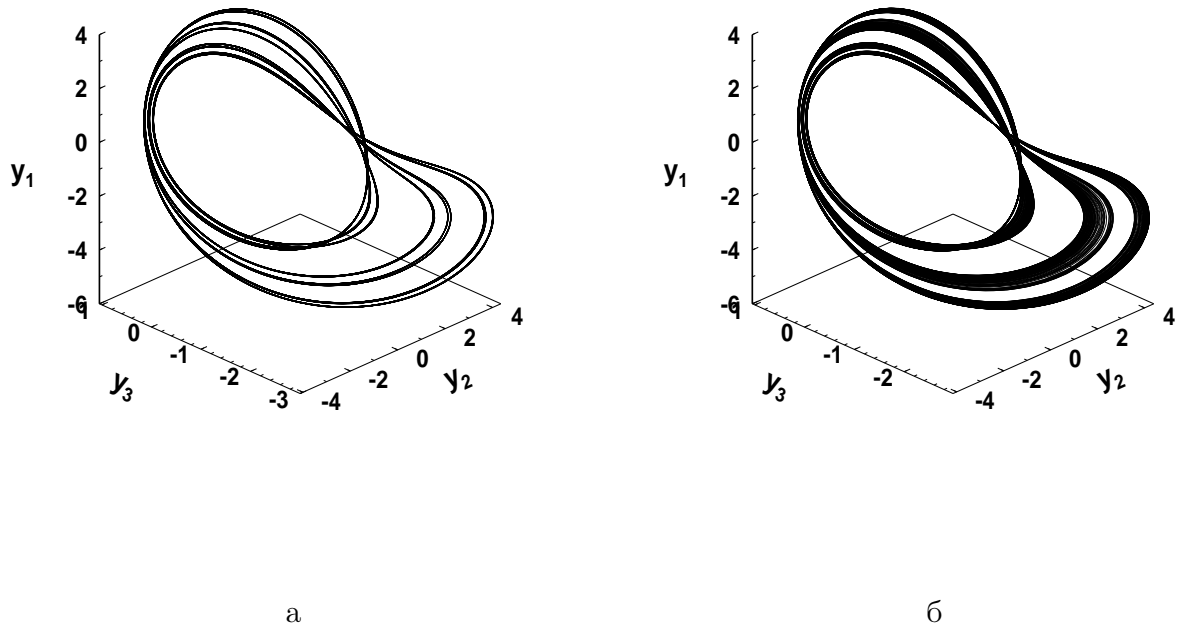


Рис. 3.4: Четвертая бифуркация предельного цикла и хаотический аттрактор при  $F = 0.169$  (а) и  $F = 0.1665$  (б).

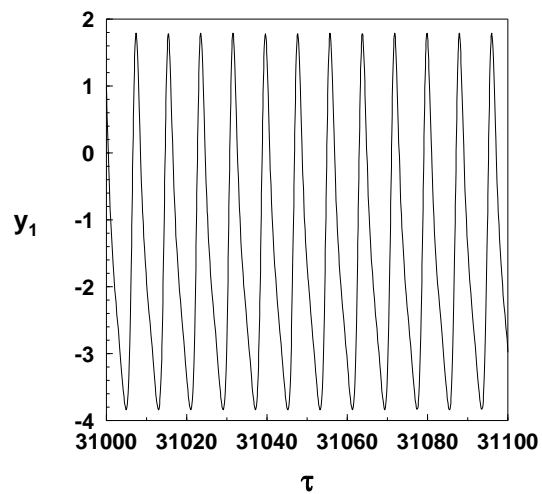
цикла. Для хаотического аттрактора возвращаемость изображающей точки траектории в любую малую окрестность аттрактора всегда имеет место в силу устойчивости по Пуассону, однако длительность интервалов времени такого возвращения – непредсказуема. Моменты времени, в которые происходят такие возвращения, образуют некую хаотическую последовательность. У хаотического аттрактора изображающая точка, принадлежащей ему траектории, совершает хаотические блуждания по бесконечному числу витков спирали аттрактора с непредсказуемыми нарушениями порядка попадания в малую окрестность того или иного витка. На других качественных отличиях регулярных режимов от хаотических остановимся в дальнейшем.

На рис. 3.5 показаны временные реализации (зависимости фазовой координаты от времени) по координате  $y_1$  для некоторых из бифуркаций предельных циклов и самого хаотического аттрактора. Четко прослеживаются удвоения периода исходного предельного цикла. Что касается временной реа-

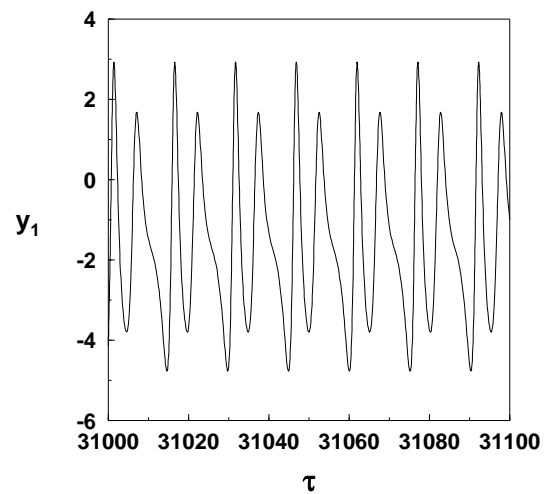
лизации хаотического аттрактора, то для более информативного представления о его структуре и отличиях от предельных циклов, необходимо рассматривать эти реализации на больших интервалах времени, что зачастую вызывает трудности. Поэтому, как правило, временные реализации хаотических аттракторов рассматриваются реже, чем иные его геометрические образы.

Далее остановимся на анализе сечений Пуанкаре найденных аттракторов системы (3.11). На рис. 3.6 приведены, построенные при помощи метода Эно, сечения Пуанкаре плоскостью  $y_3 = 0$  первых трех бифуркаций удвоения предельного цикла и самого хаотического аттрактора. Как видно из рис. 3.6, данные сечения циклов состоят из конечного числа точек. А именно, одной точки (для 1-тактного цикла), двух точек (для 2-тактного цикла) и четырех точек (для 4-тактного цикла). Эти точки повторяются через время, строго равное периоду соответствующего цикла. В отличие от регулярных аттракторов сечение Пуанкаре хаотического аттрактора (рис. 3.6.г) имеет более сложную структуру. Оно представляет собой некоторое хаотическое точечное множество, число точек которого все время растет с возрастанием времени численного интегрирования. Эти точки, в силу теоремы существования и единственности, никогда не совпадают друг с другом. В данном случае это хаотическое точечное множество локализуется вдоль нескольких областей близких по форме к линиям. Такой вид сечения Пуанкаре иногда называют "квазиленточным"[5]. Заметим, что предсказать порядок размещения точек вдоль "лент", образующих сечение невозможно, однако наперед известно, что располагаться они могут только вдоль этих лент. Таким образом, главное отличие в сечениях Пуанкаре регулярных и хаотических аттракторов состоит в том, что они "конечны и предсказуемы" для регулярных аттракторов и вообще-то "бесконечны и непредсказуемы" для хаотических аттракторов [49, 114, 120, 176, 181]. Следует подчеркнуть, что, как мы увидим далее, существуют значительно более сложные, чем квазиленточные, структуры сечений Пуанкаре хаотических аттракторов.

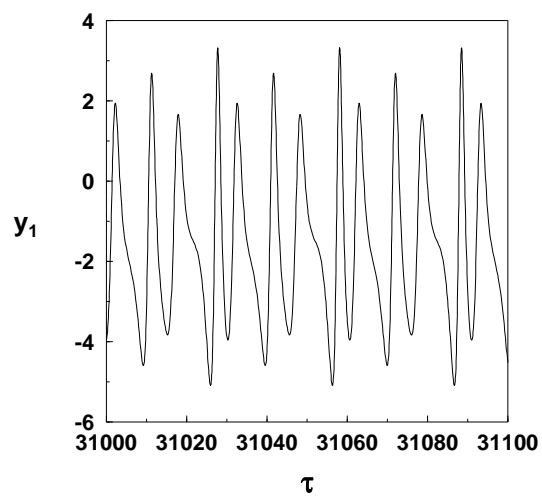
Остановимся на построении ещё нескольких характеристик обнаружен-



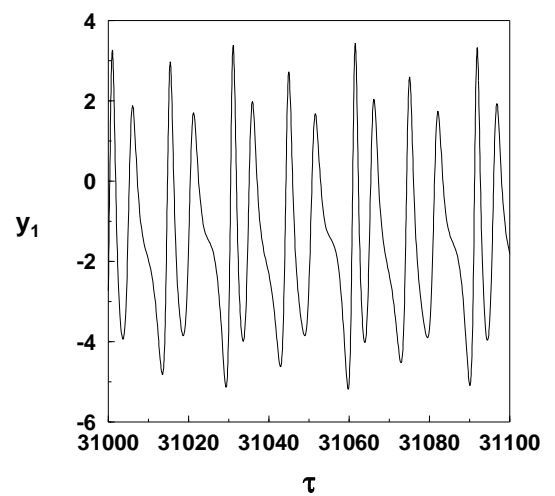
а



б



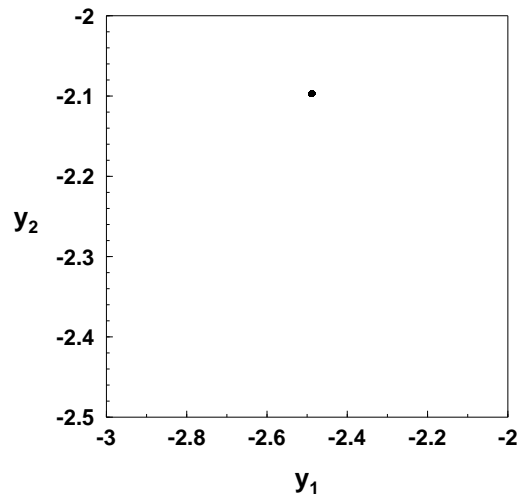
в



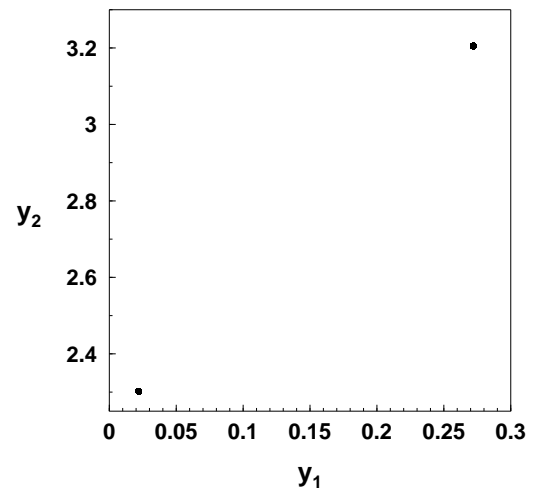
г

Рис. 3.5: Временные реализации предельного цикла и первых двух бифуркаций удвоения периода при  $F = 0.258$  (а),  $F = 0.192$  (б),  $F = 0.171$  (в) и временная реализация хаотического аттрактора при  $F = 0.1665$  (г).

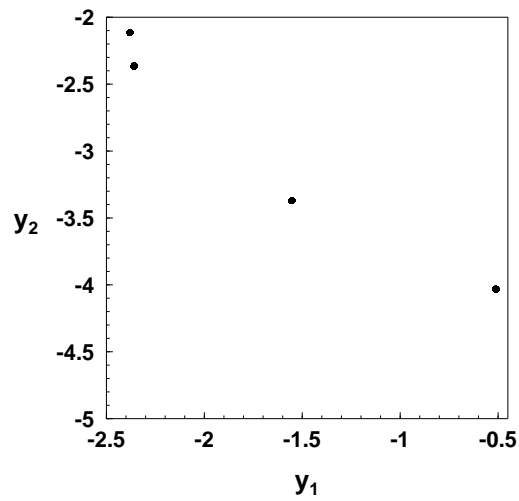




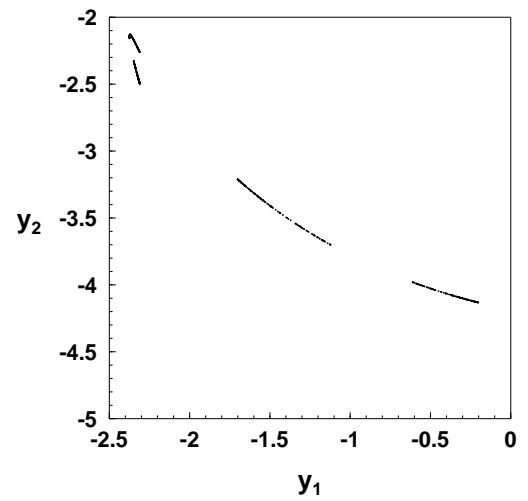
а



б



в



г

Рис. 3.6: Сечения Пуанкаре плоскостью  $y_3 = 0$  предельных циклов при  $F = 0.258$  (а),  $F = 0.192$ (б),  $F = 0.171$ (в) и хаотического аттрактора при  $F = 0.1665$ (г).

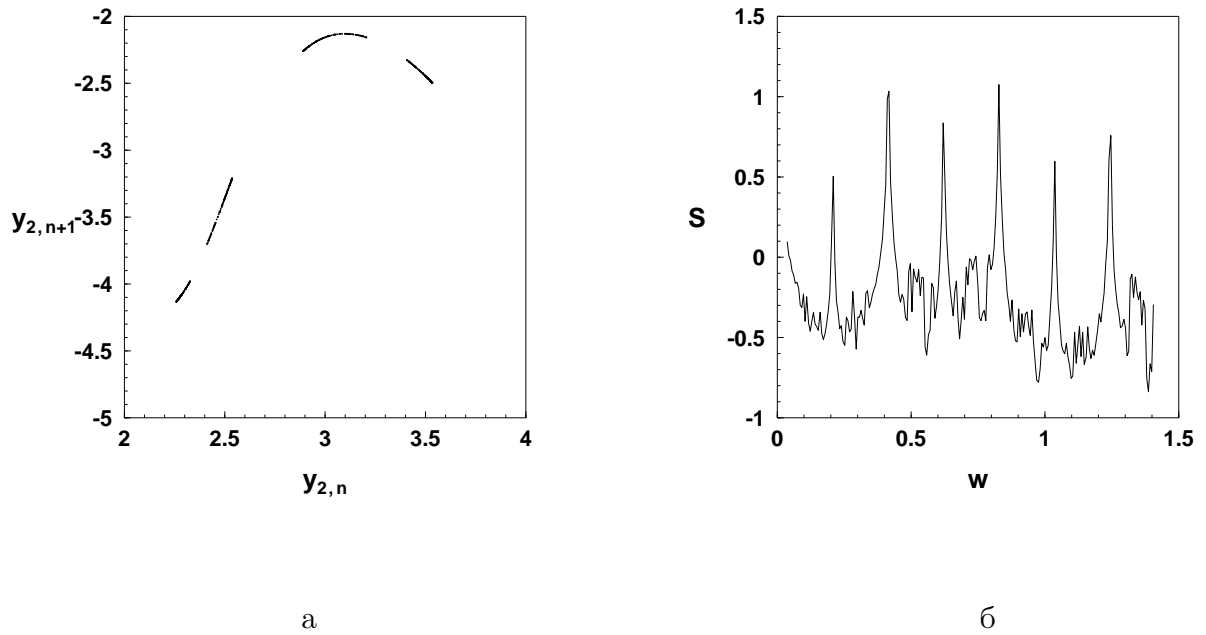


Рис. 3.7: Отображение Пуанкаре (а) и распределение спектральной плотности (б) хаотического аттрактора при  $F = 0.1665$ .

ного хаотического аттрактора. Так, на рис. 3.7а–б приведены, соответственно, отображение Пуанкаре и распределение спектральной плотности (Фурье-спектр) для хаотического аттрактора, построенные при значении  $F = 0.1665$ . Как и следовало ожидать, исходя из вида сечения Пуанкаре хаотического аттрактора, его отображение Пуанкаре очень близко к линии на плоскости. Это означает, что исходная система дифференциальных уравнений может быть приближенно сведена к одному дискретному отображению вида

$$y_{n+1} = f(y_n),$$

исследование динамики которого будет более простым, чем исследование динамики системы. Сам вид отображения Пуанкаре отдаленно напоминает параболу, которая возникает при исследовании хаоса в одномерных отображениях.

На рис. 3.7б по осям координат отложены, соответственно, частота  $w$  и логарифм модуля комплексной амплитуды обратного преобразования Фурье по одной из временных реализаций фазовых переменных. Как видно из это-

го рисунка, Фурье–спектр данного аттрактора непрерывный, что является еще одним доказательством его хаотичности. Однако в спектре хорошо видны отдельные пики, свидетельствующие о гармониках предельных циклов, участвовавших в образовании аттрактора.

Таким образом, совершенно ясно, что переход от регулярного режима к хаотическому происходит в строгом соответствии со сценарием Фейгенбаума [5, 62, 74, 151, 152, 153], то есть через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода предельных циклов. Доказательством реализации вышеупомянутого сценария служат также и рис. 3.2б, г. Так при рассмотрении правой части рис. 3.2б хорошо видны точки подхода графика к оси абсцисс из отрицательной области значений  $\lambda$ . Эти точки подхода к оси абсцисс и соответствуют последовательным бифуркациям удвоения периода. При построении фрагмента графика, соответствующему интервалу каскада бифуркаций удвоения в более крупном масштабе, удастся с высокой точностью определить численные значения точек бифуркаций и пороговое значение параметра, при котором возникает хаотический аттрактор. Достаточно отчетливо виден тип перехода к хаосу и на фазопараметрической характеристике (правая часть рис. 3.2г). Хорошо просматриваются точки в которых, при изменении параметра  $F$ , происходит вилкообразное расщепление ветвей бифуркационного дерева. Эти точки соответствуют бифуркациям удвоения периода циклов. На рисунке также хорошо просматривается граница хаоса, которому отвечает очень темный участок кроны бифуркационного дерева. Отметим, что начальные участки бифуркаций удвоения не попали на рисунок, так как ввиду его сложности некоторые, сравнительно простые, части бифуркационного дерева на рисунке не приведены.

Возникший хаотический аттрактор существует в системе (3.11) при изменении значений  $F$  в пределах  $0.11349 \leq F \leq 0.1673$ . По мере уменьшения значений  $F$  хаос становится более развитым, в смысле того, что траектории начинают заполнять "дыры" фазового портрета. Этот процесс развития хаоса показан на рис. 3.8а–г. Фазовый портрет аттрактора, приведенного на

рис. 3.8б имеет только одну большую "дыру" в своей структуре. Изменение отображений Пуанкаре по мере уменьшения значений  $F$  иллюстрируется рис. 3.8в–г. В обоих случаях полученное отображение может быть достаточно точно аппроксимировано при помощи некоторых парабол. Отображение, приведенное на рис. 3.8г, вообще имеет вид квадратичного одномерного отображения с локальным максимумом, что является доказательством того, что система (3.11) имеет установившийся хаотический режим колебаний [5, 62].

При уменьшении  $F$  изменения претерпевает и Фурье–спектр хаотических аттракторов. Так, на рис. 3.9а–б показаны Фурье–спектры аттракторов, построенные при значениях  $F = 0.164$  и  $F = 0.115$ . Как видно из рисунков, оба спектра являются непрерывными, что свидетельствует о хаотичности рассматриваемых аттракторов. Обратим внимание на то, что в Фурье–спектре аттрактора, соответствующего значению  $F = 0.115$ , практически разрушились отдельные пики и он имеет вид, напоминающий спектр, характерный для шумовых хаотических сигналов, изучаемых в радиофизике. Объяснение этому факту будет дано чуть ниже.

При дальнейшем уменьшении значения  $F$  хаотический аттрактор исчезает и в системе возникает предельный цикл. Фазовый портрет и сечение Пуанкаре, плоскостью  $y_3 = 0$ , характерные для циклов такого типа, приведены на рис. 3.9в–г, в то время как временная реализация по фазовой переменной  $y_1$  и распределение спектральной плотности приведены на рис. 3.10а–б. Все характеристики этого предельного цикла являются типичными для регулярных аттракторов. Сечение Пуанкаре этого цикла состоит из трех точек, которые повторяются в строго определенном порядке через время, равное периоду цикла. Следовательно, этот цикл является 3–тактным. Заметим, что все ранее построенные циклы имели четную тактность. Фурье–спектр цикла является дискретным с четко видными пиками на частотах, соответствующих основным гармоникам цикла. Его временная реализация – периодическая функция.

Проанализируем сценарий перехода "цикл–хаос" с левой стороны рас-

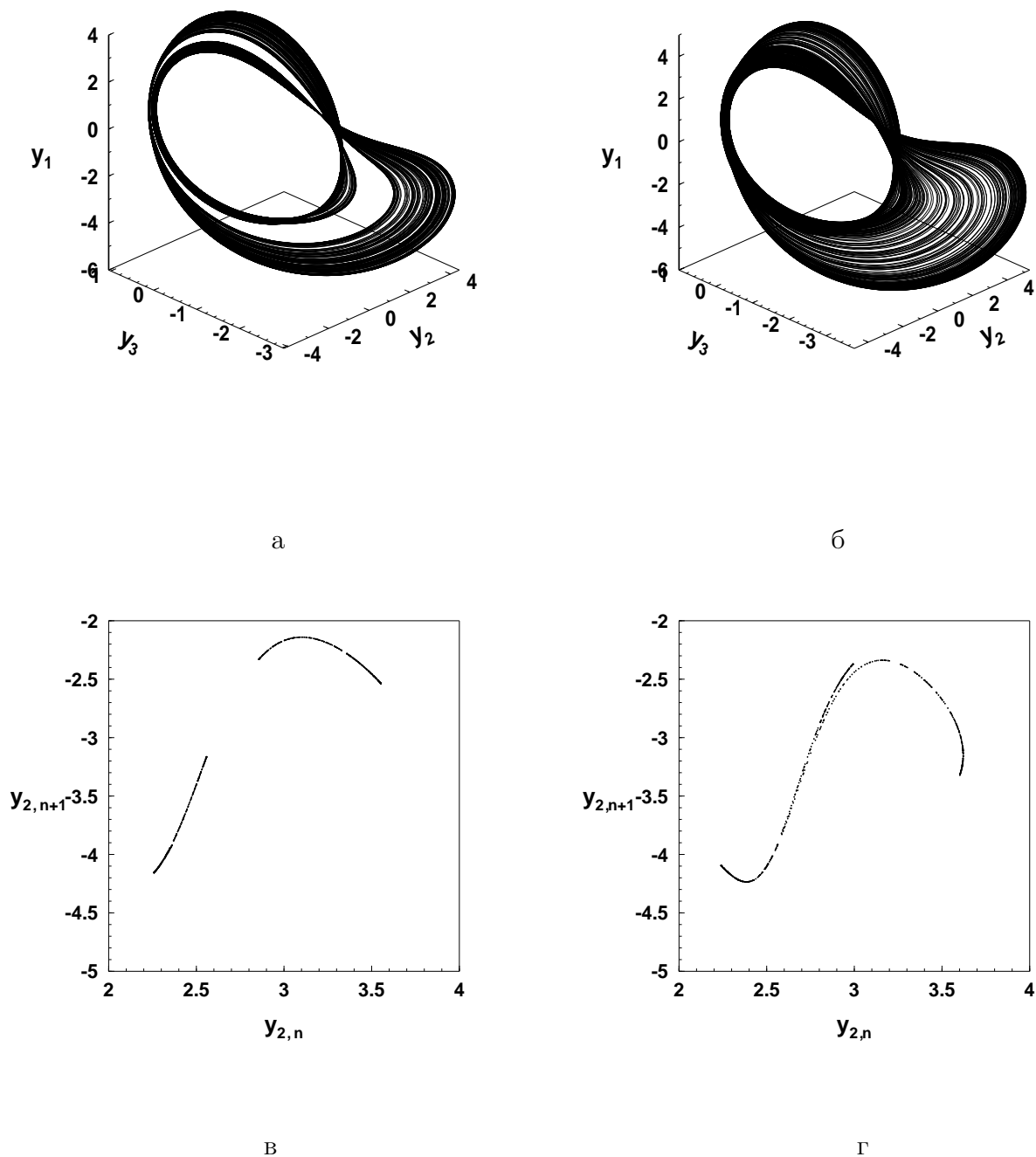
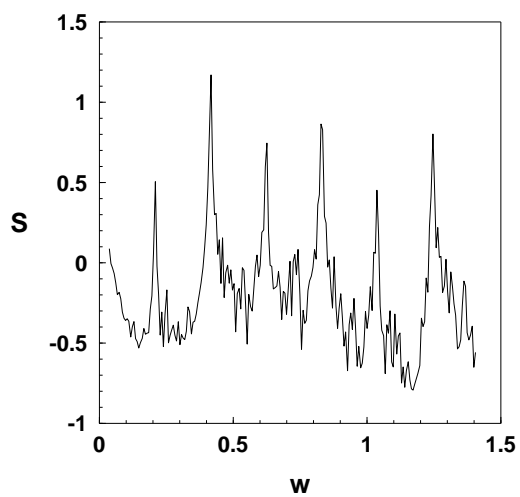
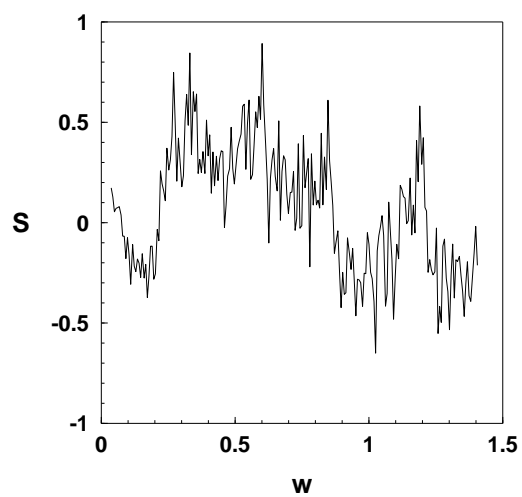


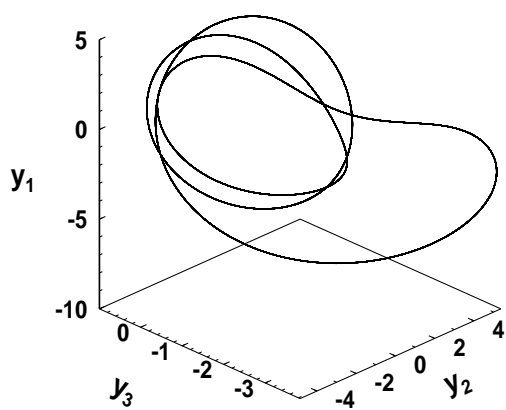
Рис. 3.8: Фазовые портреты (а)–(б) и отображения Пуанкаре (в)–(г) хаотических аттракторов, соответственно, при  $F = 0.164$  и  $F = 0.115$ .



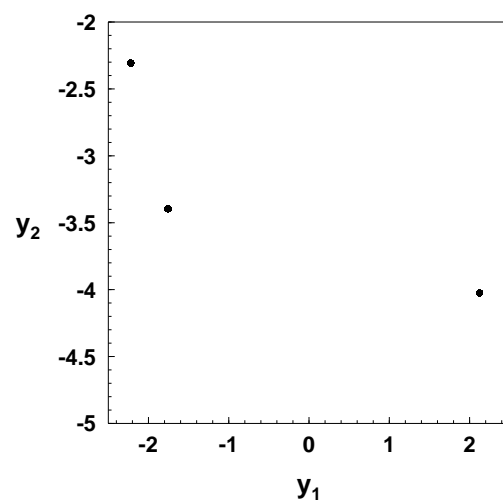
a



б

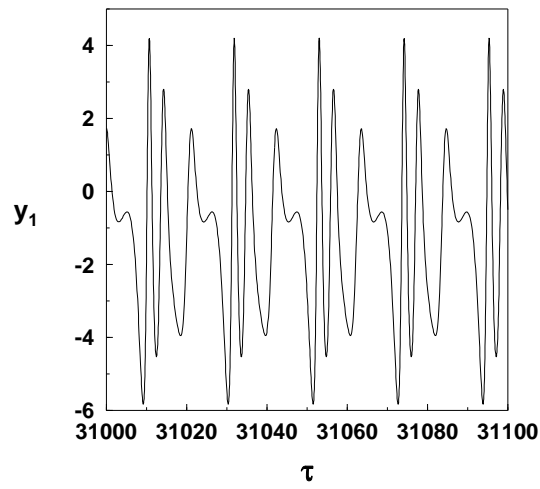


в

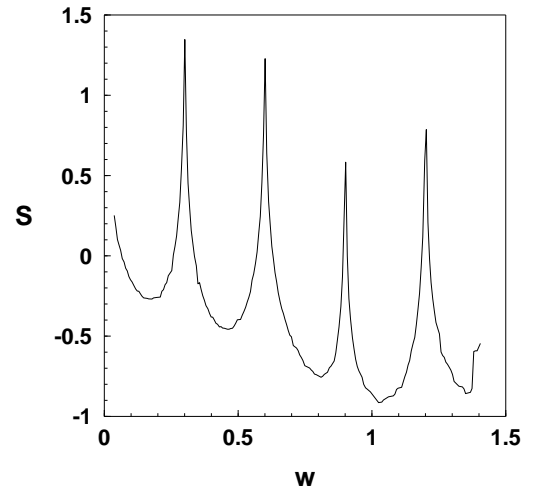


г

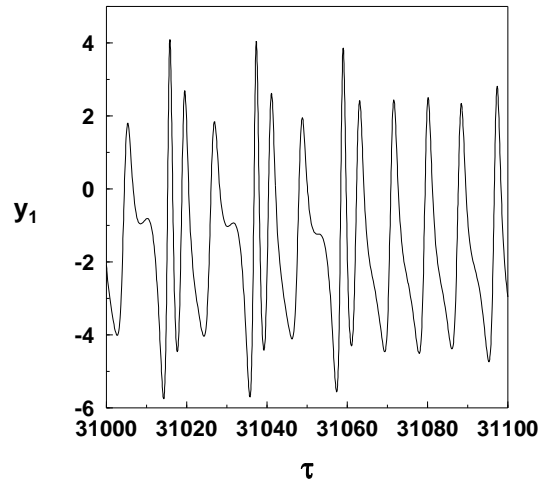
Рис. 3.9: Фурье-спектры хаотических аттракторов при  $F = 0.164$  (a) и при  $F = 0.115$  (б); фазовый портрет (в) и сечение Пуанкаре (г) предельного цикла при  $F = 0.1134$ .



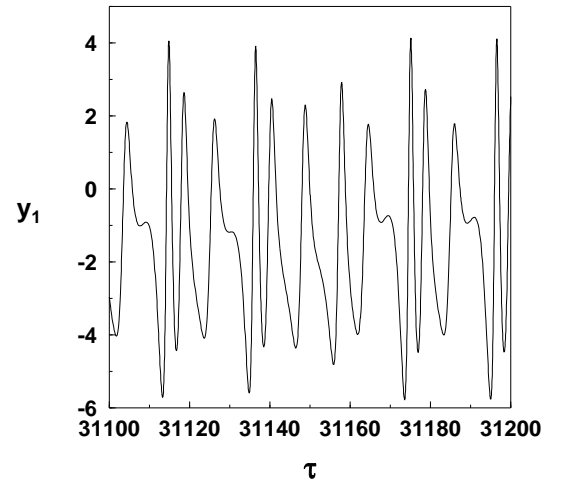
а



б



в



г

Рис. 3.10: Временная реализация (а) и распределение спектральной плотности (б) предельного цикла при  $F = 0.1134$ ; временные реализации хаотического аттрактора (в)– (г) при  $F = 0.11349$ .

смаатриваемого интервала существования хаотических аттракторов. С левой стороны такой переход происходит через перемежаемость. Когда мы приближаемся слева к точке бифуркации, которая происходит при  $F \approx 0.11348$ , к существующему в системе устойчивому предельному циклу, типа изображенного на рис. 3.10а, начинает приближаться неустойчивый. В точке бифуркации они сливаются и исчезают. При дальнейшем, как угодно малом, увеличении  $F$  происходит так называемая касательная бифуркация. У системы (3.11) вообще не остается устойчивых установившихся режимов в этой части фазового пространства. Поэтому близкие траектории начинают разбегаться и покидать область, в которой находился устойчивый предельный цикл. В этой области не существует никаких иных аттракторов системы. Однако, так как нелинейная система (3.11) является устойчивой по Лагранжу и Пуассону [62] и не имеет устойчивых предельных множеств, в окрестности исчезнувшего предельного цикла, происходит процесс реинжекции траекторий, в результате которого они снова возвращаются в область исчезнувшего цикла. Этот процесс, бесконечно повторяясь, приводит к образованию сложного, неустойчивого по Ляпунову (но устойчивого по Лагранжу и по Пуассону) предельного множества – хаотического аттрактора типа приведенного на рис. 3.8б. Движение траекторий данного хаотического аттрактора можно разбить на две стадии (фазы): ламинарную, которой соответствуют близкие к периодическим движения траекторий в малой окрестности исчезнувшего предельного цикла, и турбулентную, которой соответствуют уходы траекторий в более далекие области фазового пространства. Таким образом, движение траекторий на возникшем аттракторе состоит из двух "перемежающихся" фаз. Причем, моменты времени перехода от ламинарной фазы к турбулентной непредсказуемы. Они образуют хаотическую временную последовательность. Такой переход от регулярного режима к хаотическому Помо и Манневилль назвали перемежаемостью первого типа [140, 190, 191, 211].

У рассматриваемого хаотического аттрактора (рис. 3.8б) ламинарная фаза состоит из близких к периодическим движений в окрестности исчезнувшего



го предельного цикла (рис. 3.9в). Турбулентная фаза (турбулентные всплески) представляет собой непредсказуемые наперед блуждания траекторий по виткам спиралей, находящихся внутри фазового объема, который занимал исчезнувший предельный цикл.

На рис. 3.10в–г приведены фрагменты временной реализации хаотического аттрактора по фазовой переменной  $y_1$ . Сравним их с аналогичной временной реализацией предельного цикла рис. 3.10а. При внимательном изучении рис. 3.10а можно заметить, что на графике приведенной на этом рисунке периодической функции последовательно через равные промежутки времени повторяются четыре локальных максимума. Длительность промежутков повторения совпадает с периодом функции. В свою очередь, при рассмотрении рис. 3.10в–г сразу бросаются в глаза нарушения упорядоченности в повторении максимумов. Так на рис. 3.10в, если смотреть слева направо, сначала наблюдаются три последовательных повторения указанных максимумов. Однако при внимательном взгляде на рисунок видны отличия в величине этих максимумов, по сравнению с рис. 3.10а. В правой части рис. 3.10в график функции  $y_1(\tau)$  уже заметно отличается от графика, приведенного на рис. 3.10а. Такую же качественную структуру имеет график, приведенный на рис. 3.10г. Здесь наблюдаются как фрагменты очень похожие на график с рис. 3.10а, так и интервалы, на которых эти графики имеют заметные отличия. Интервалы времени на рис. 3.10в.–г, в которых наблюдаются только небольшие отличия в величине максимумов, при сохранении их определенной упорядоченности, отвечают ламинарным фазам движения траекторий аттрактора. В свою очередь, интервалы заметных нарушений в порядке чередования максимумов соответствуют турбулентным всплескам хаотического аттрактора. К сожалению, для более детального выяснения отличий необходимо рассматривать временные реализации на достаточно больших промежутках времени, что приводит к "замазыванию" графиков на рисунках.

Теперь остановимся еще на одной очень важной характеристике хаотического аттрактора – распределению естественной инвариантной меры по

его фазовому портрету. Это распределение характеризует вероятность попадания изображающей точки траектории хаотического аттрактора в заданную область фазового пространства. К сожалению, до сих пор не существует строгого доказательства существования такой меры для произвольного хаотического аттрактора [7, 62]. Однако на практике пользуются следующим, достаточно эффективным, приемом для приближенного построения распределения инвариантной меры по фазовому портрету хаотического аттрактора [62]. Напомним, что исследуемая система интегрируется численно, а при выведении результатов интегрирования на экран компьютера применяется следующий прием. При попадании изображающей точки аттрактора в какой либо пиксель экрана этому пикселю присваивается определенный цветовой код и числовой код единица. Если при дальнейшем численном интегрировании изображающая точка снова попадает в этот же пиксель, числовой код увеличивается на единицу. Заметим, что попадание точек в один и тот же пиксель вовсе не означает совпадение их координат, а лишь свидетельствует, что их координаты как угодно близки друг с другом. То есть разные фазовые точки хаотического аттрактора не совпадают одна с другой, что невозможно в силу теоремы существования и единственности, а лишь так близки между собой, что их близость превосходит разрешающую способность экрана компьютера. Далее при повторных попаданиях точки в определенный пиксель экрана числовой код каждый раз увеличивается на единицу. Чем больше числовой код, тем с большей яркостью точка высвечивается на экране. Таким образом, те части хаотического аттрактора, где траектория находится большую часть времени, ярче изображаются на экране компьютера. Разумеется, такой же эффект будет наблюдаться и при распечатке результатов численного интегрирования на принтере. Получаемые изображения принимают за приближенное представление распределения естественной инвариантной меры по фазовому портрету аттрактора.

На рис. 3.11 приведено, выполненное в технике кодировки оттенками черного цвета, распределение естественной инвариантной меры по фазовому

портрету хаотического аттрактора при  $F = 0.11349$ . Более темные области соответствуют тем участкам фазового портрета, в которых траектории проводят большую часть времени. Эти, более темные, участки фазового портрета находятся в окрестности исчезнувшего цикла. Они соответствуют ламинарным фазам движения по аттрактору. Более светлые участки соответствуют турбулентным всплескам траекторий, которые здесь совершаются вовнутрь области фазового объема аттрактора. Данный рисунок указывает на то, что длительность ламинарных фаз превышает длительность турбулентных, что хорошо согласуется с известными теоретическими представлениями хаотической динамики [5, 62]. Кроме того, этот рисунок служит еще одним доказательством перехода к хаосу через перемежаемость по Помо–Манневиллю [120].

Внимательное изучение рис. 3.2б позволяет обнаружить еще одну интересную закономерность в поведении системы (3.11) в интервале изменения параметра  $F \in (0.114, 0.167)$ , в котором у нее существуют хаотические аттракторы. С этой целью на рис. 3.12а приведен увеличенный фрагмент рис. 3.2б. На рисунке хорошо видны очень узкие интервалы, на которых наблюдаются провалы графика зависимости ляпуновского характеристического показателя в область отрицательных значений. Эти провалы соответствуют интервалам изменения  $F$ , в которых хаотический аттрактор исчезает, и в системе (3.11) возникает регулярный установившийся режим в виде устойчивого предельного цикла. Такие небольшие интервалы периодических режимов в хаотических областях изменения параметра называются окнами периодичности.

На рис. 3.12б приведен фазовый портрет такого цикла из окна периодичности при  $F = 0.1425$ . Интересно, что построенный цикл является 5-тактным. Соответственно его сечение Пуанкаре состоит из пяти точек. Циклы с такой тактностью еще не встречались при изучении системы (3.11). При "выходе" из этого окна периодичности через его правую границу, т.е. при увеличении  $F$  возникает хаотический аттрактор. Распределение инвариантной меры по

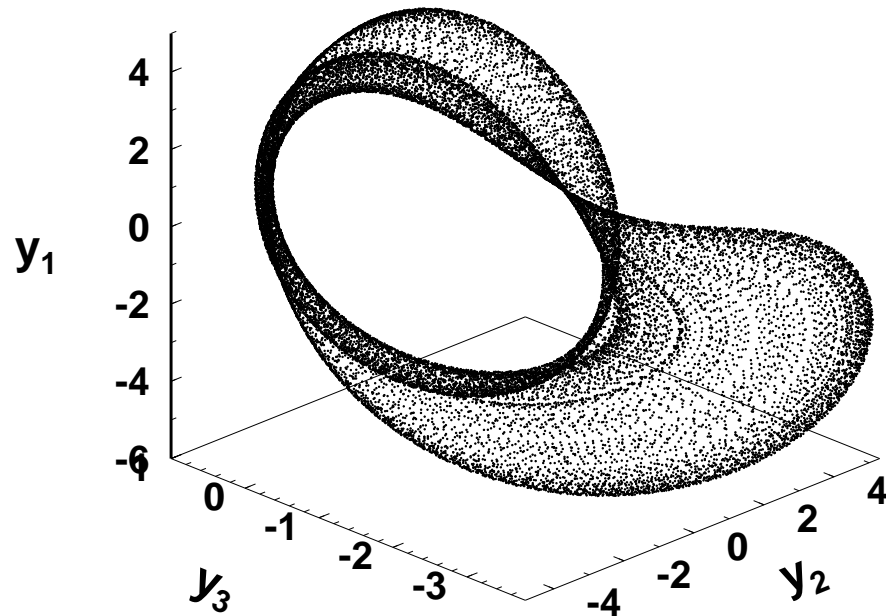
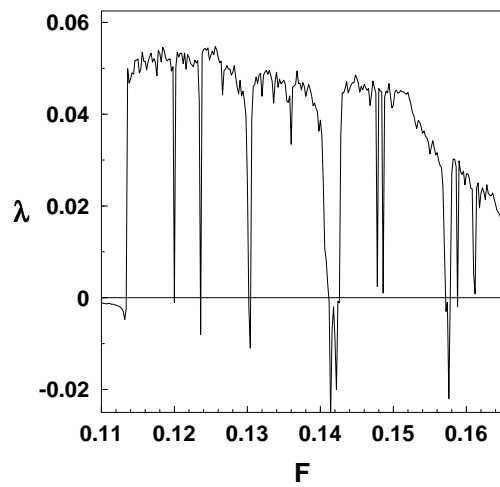
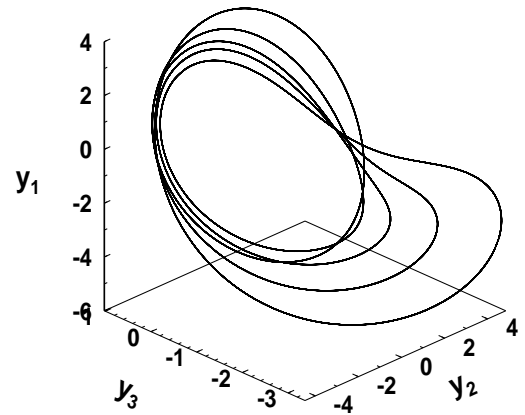


Рис. 3.11: Распределение естественной инвариантной меры по фазовому портрету хаотического аттрактора при  $F = 0.11349$ .

фазовому портрету хаотического аттрактора, существующего в системе при значении  $F = 0.14275$ , построенное в технике кодирования оттенками черного цвета, приведено на рис. 3.13. Это значение  $F$  находится сразу же за правой границей окна периодичности. Аттрактор представляет собой развитый хаос, уже исследованный нами. Однако внимательное изучение рисунка показывает, что затемненные участки распределения инвариантной меры занимают достаточно узкие области в окрестности пяти витков исчезнувшего пятитактного цикла. Практически на рис. 3.13 отчетливо прорисовывается



а



б

Рис. 3.12: Увеличенный фрагмент зависимости ляпуновского характеристического показателя (а) и предельный цикл в окне периодичности в хаосе при  $F = 0.1425$  (б).

исчезнувший пятитакный цикл. Следовательно, переход к хаосу при "выходе" параметра через правую границу окна периодичности происходит через перемежаемость по Помо–Манневиллю.

Интересные закономерности наблюдаются и при выходе из окна периодичности через его левую границу. Не приводя подробного иллюстративного материала, отметим, что проведенные исследования показали, что при выходе через левую границу рассматриваемого окна периодичности в системе (3.11) наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода. Этот каскад завершается возникновением хаотического аттрактора. Заметим, что при нахождении последовательных бифуркаций удвоения приходится при расчетах брать очень большое число знаков после десятичной точки в значении параметра  $F$ . Распределение инвариантной меры по фазовому портрету, возникающего в системе при выходе из окна периодичности через левую границу,

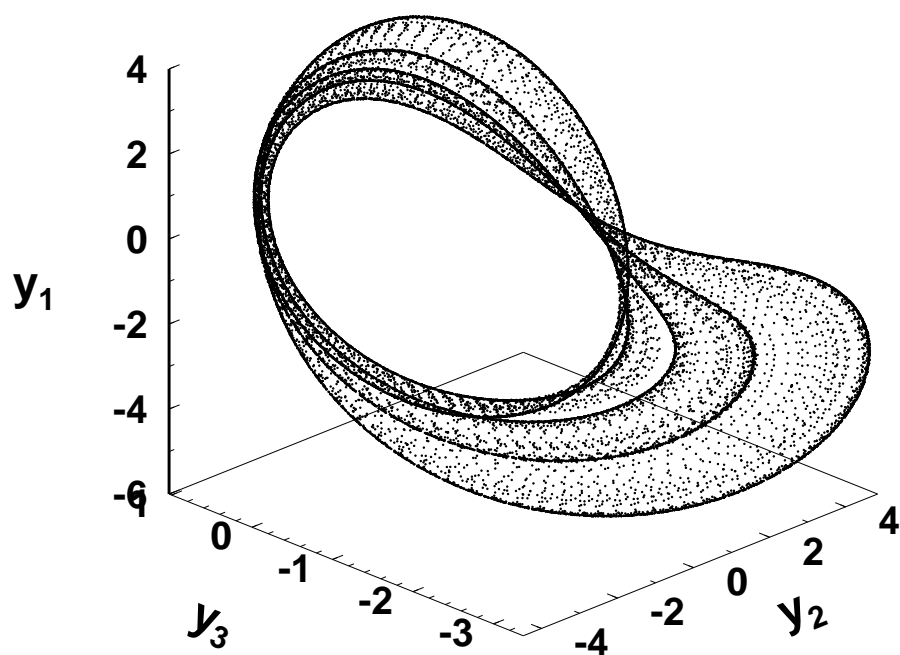


Рис. 3.13: Распределение естественной инвариантной меры по фазовому портрету хаотического аттрактора при  $F = 0.14275$ .

хаотического аттрактора приведено на рис. 3.14. Этот аттрактор построен при  $F = 0.1405$ . Значение  $F$  находится сразу же за левой границей окна периодичности. Распределение инвариантной меры здесь достаточно равномерно по фазовому портрету хаотического аттрактора. Далее, как видно из рис. 3.14, этот хаотический аттрактор локализуется в заметно меньшей области фазового пространства, чем большинство ранее рассмотренных. Это объясняется тем, что значение параметра  $F$  взято очень близко у порога возникновения хаоса. При удалении от этого порога, то есть при уменьшении  $F$ , траектории начинают быстро заполнять "дыры" фазового портрета и хаос приобретает развитую структуру.

Таким образом, переход от регулярного режима к хаотическому осуществляется по сценарию Фейгенбаума, при выходе через левую границу окна периодичности, и через перемежаемость по Помо–Манневиллю при выходе через правую границу окна. Налицо повторение на малом интервале изменения  $F$  тех закономерностей в возникновении и развитии хаоса, что наблюдались на "большом" интервале  $0.11349 \leq F \leq 0.1673$ .

Теперь вкратце рассмотрим ситуацию с возникновением хаотических аттракторов при отрицательных значениях  $F$ . Из рис. 3.2а видно, что существует три "больших" интервала изменения  $F$ , в которых старший ляпуновский характеристический показатель системы (3.11) принимает положительное значения. Следовательно, система имеет в этих интервалах хаотические аттракторы. Внимательное изучение рис. 3.2а дает возможность не только установить наличие хаоса, но и указывает, в некоторых случаях, на сценарий перехода к хаосу. Так, повторяющиеся подходы графика ляпуновского характеристического показателя к нулевой линии со стороны отрицательных значений, наблюдающиеся в правой окрестности точек  $F \approx -0.12$  и  $F \approx -0.19$ , а также в левой окрестности точки  $F \approx -0.28$  указывает на то, что имеет место переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Несколько менее явно каскад бифуркаций удвоения виден из фазопараметрической характеристики рис. 3.2в, хотя в правой части рисунка данные бифуркации достаточно

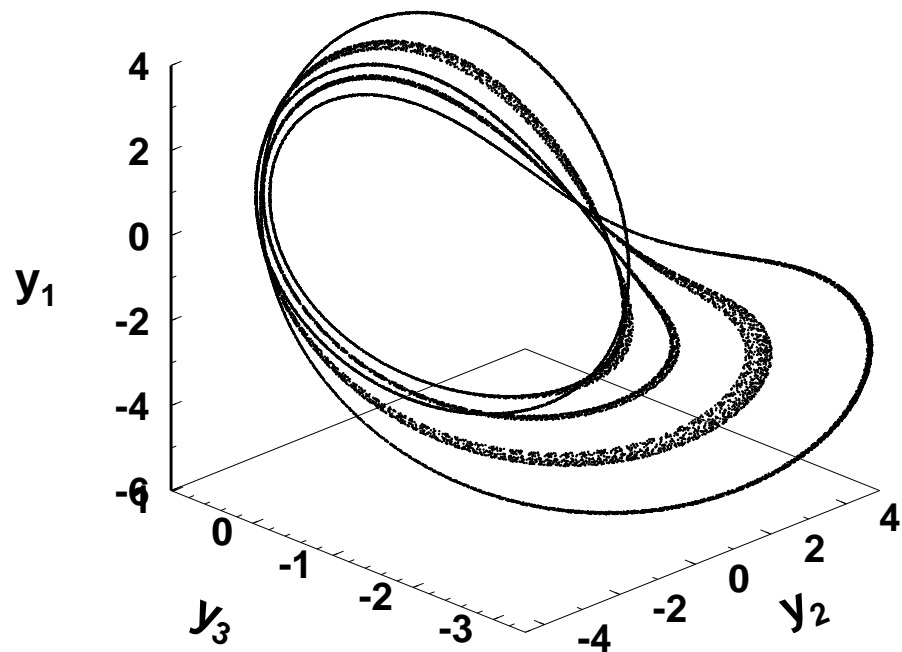


Рис. 3.14: Распределение естественной инвариантной меры по фазовому портрету хаотического аттрактора при  $F = 0.1405$ .

заметны. Увеличение масштаба отдельных фрагментов бифуркационного дерева делает отчетливо заметными бифуркации удвоения и в других частях рис. 3.2в.

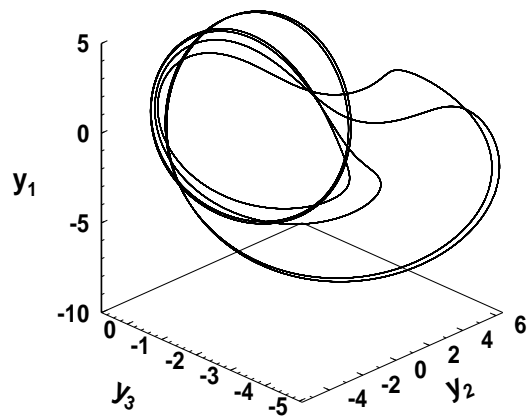
Более детально остановимся на типах хаотических аттракторов и сценариях перехода "порядок–хаос" при отрицательных значениях  $F$ . Как мы только что установили, в правой полуокрестности точки  $F = -0.12$  в системе существуют устойчивые предельные циклы. Со значения  $F = -0.124$  в системе (3.11) начинается каскад бифуркаций удвоения периодов циклов. На



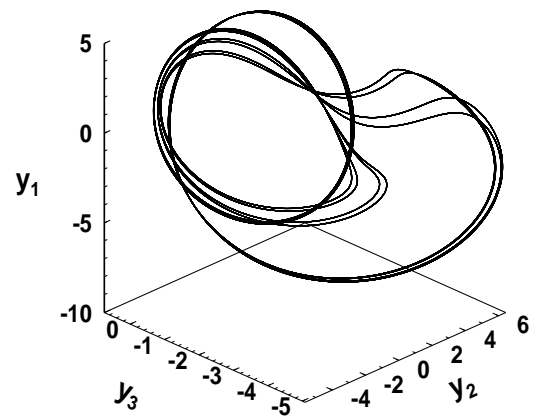
рис. 3.15а–в приведены первые три бифуркации этого бесконечного каскада [114]. Данный процесс заканчивается в точке  $F \approx -0.1266$  возникновением хаотического аттрактора. Фазовый портрет аттрактора такого типа приведен на рис. 3.15г [114]. Этот аттрактор несколько отличается внешне и количественно от ранее рассмотренных хаотических аттракторов системы, которые возникали в результате бесконечного каскада бифуркаций удвоения. Однако качественно структура последнего аттрактора подобна ранее рассмотренным и характеризуется наличием нескольких "дыр" на фазовом портрете. Траектории аттрактора совершают движения вдоль витков его спиралей с непредсказуемым наперед порядком перехода с одной спирали на другую. Таким образом, переход к хаосу здесь осуществляется в соответствии со сценарием Фейгенбаума.

На рис. 3.16а–б приведены, соответственно, сечение Пуанкаре и распределение спектральной плотности хаотического аттрактора, построенные при значении  $F = -0.1296$ . Заметим, что для улучшения наглядности сечения Пуанкаре, здесь в качестве секущей плоскости бралась плоскость  $y_3 = -2$ . Как видно из приведенных рисунков, сечение Пуанкаре данного хаотического аттрактора имеет квазиленточную структуру. Фурье–спектр аттрактора непрерывный, но в нем четко присутствуют отдельные пики, соответствующие гармоникам предельных циклов, потерявших устойчивость при рождении хаотического аттрактора. Здесь наблюдается полная аналогия с возникновением хаотического аттрактора по сценарию Фейгенбаума при положительных значениях  $F$ .

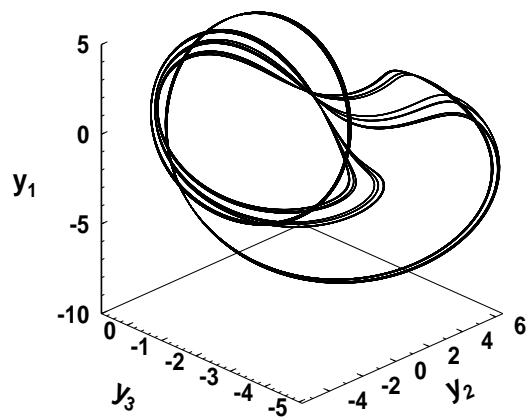
При дальнейшем уменьшении  $F$  начинается развитие структуры хаоса, в результате которого траектории аттрактора начинают все более и более заполнять "дыры" фазового портрета. Увеличиваются длины лент в сечении Пуанкаре, а в непрерывном Фурье–спектре заметно уменьшаются отдельные пики. Все вышесказанное хорошо видно на рис. 3.16в–г, на которых приведены фазовый портрет и Фурье–спектр для хаотического аттрактора, построенного при значении  $F = -0.1504$ , находящего у левой границы интервала



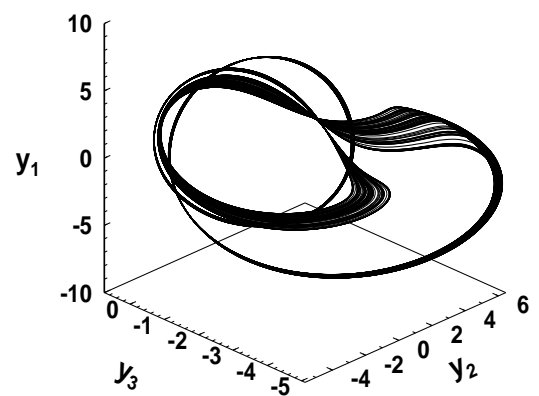
а



б

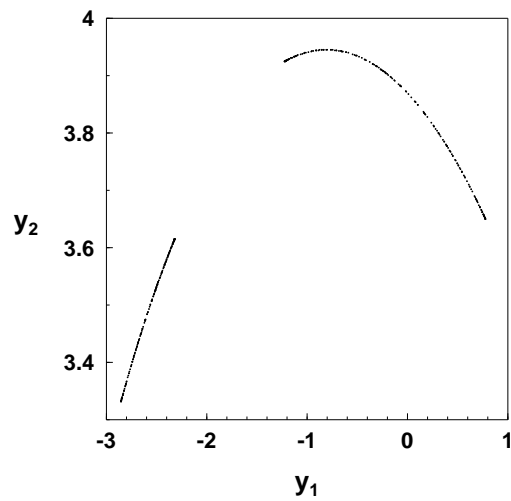


в

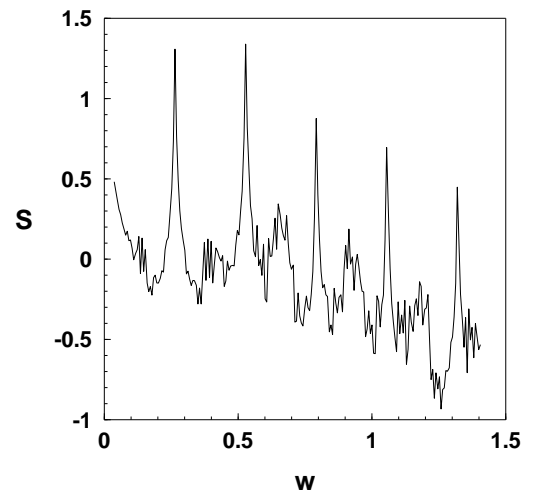


г

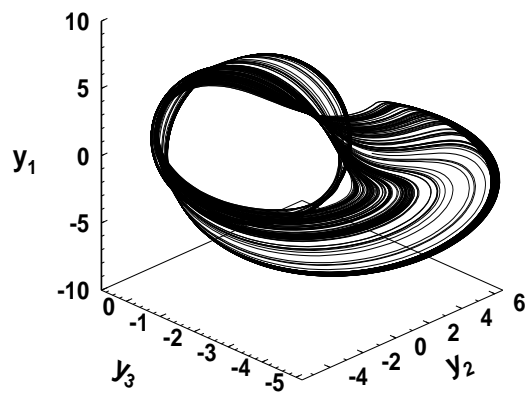
Рис. 3.15: Каскад бифуркаций удвоения периода предельного цикла при  $F = -0.1238$  (а),  $F = -0.1258$  (б),  $F = -0.1264$  (в) и хаотический аттрактор при  $F = -0.1296$  (г).



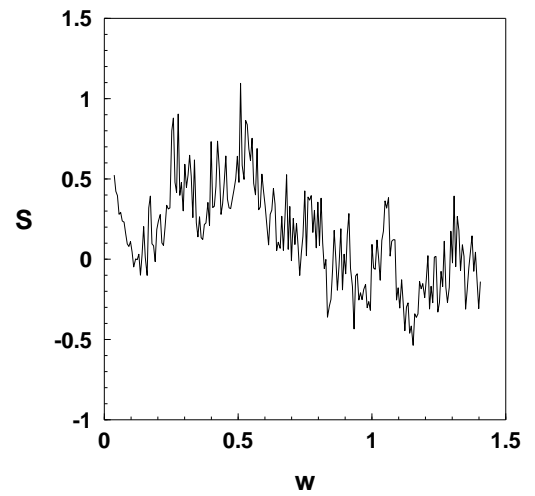
a



б



в



г

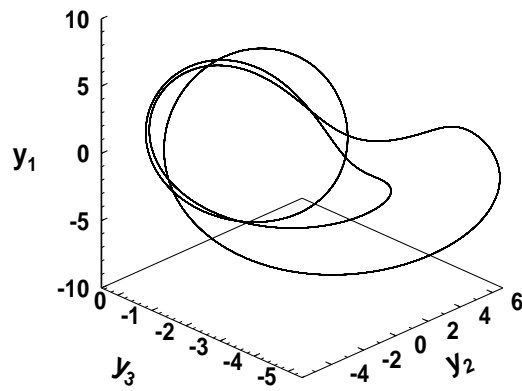
Рис. 3.16: Сечение Пуанкаре (а) и распределение спектральной плотности хаотического аттрактора при  $F = -0.1296$ (б); фазовый портрет (в) и распределение спектральной плотности (г) хаотического аттрактора при  $F = -0.1504$ .

хаотичности.

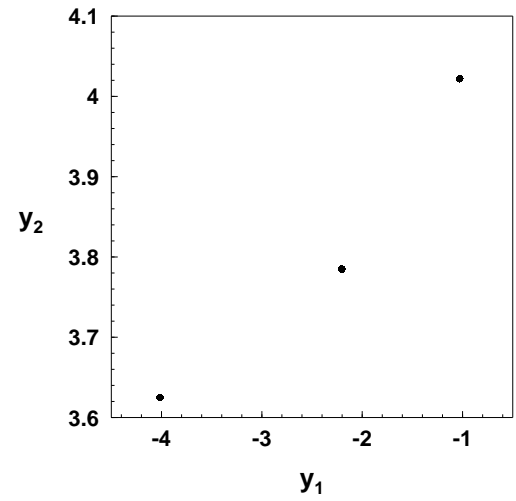
Теперь покажем, что и при отрицательных значениях  $F$  возможен переход к хаосу через перемежаемость. При  $F = -0.2136$  в системе существует предельный цикл, фазовый портрет, сечение Пуанкаре и распределение спектральной плотности которого приведены на рис. 3.17а–в. Данный предельный цикл является трехтактным и его сечение Пуанкаре состоит из трех точек. Фурье–спектр этого цикла является дискретным с пиками модуля комплексной амплитуды на гармониках цикла. При незначительном уменьшении  $F$  этот цикл разрушается и в системе возникает хаотический аттрактор, распределение инвариантной меры по фазовому портрету которого, построенное при  $F = -0.2137$ , приведено на рис. 3.17г. На распределении инвариантной меры отчетливо видно, что более темными участками изображается область, по форме напоминающая небольшую окрестность исчезнувшего предельного цикла. Это доказывает, что переход к хаосу совершается через перемежаемость. Ламинарной фазой этой перемежаемости являются близкие к периодическим движения траекторий аттрактора в окрестности исчезнувшего цикла, а турбулентной (более светлые области на рис. 3.17г) – нерегулярные уходы траекторий на другие участки области, занимаемой хаотическим аттрактором.

На рис. 3.18а–б приведены, соответственно, сечение Пуанкаре и распределение спектральной плотности хаотического аттрактора при  $F = -0.2137$ . Сечение Пуанкаре по прежнему имеет ленточную структуру с хаотично располагающимися на лентах точками, число которых постоянно возрастает с увеличением времени численного интегрирования системы. Фурье–спектр – непрерывный, но в нем заметны отдельные пики, "воспоминания" о гармониках исчезнувшего предельного цикла.

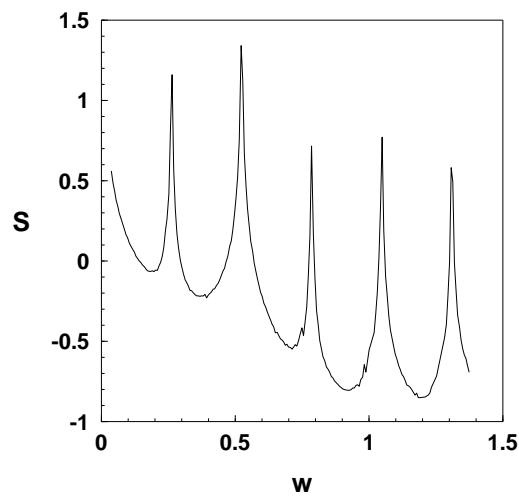
Отметим, что из рис. 3.2а очевидно, что окна периодичности в системе (3.11) имеют место и при отрицательных значениях  $F$ . Таким образом, особенности перехода к хаосу в системе (3.11) и качественная структура хаотических аттракторов при отрицательных значениях  $F$  во многом повторяют



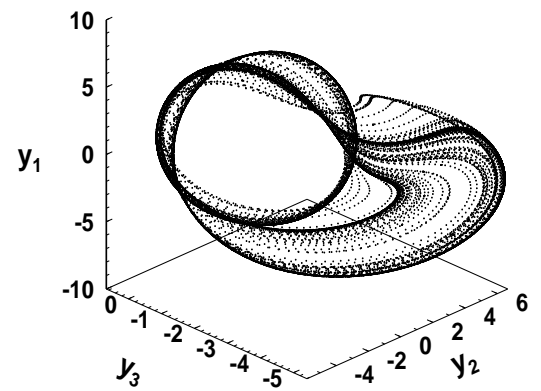
а



б



в



г

Рис. 3.17: Фазовый портрет (а), сечение Пуанкаре (б) и распределение спектральной плотности (в) предельного цикла при  $F = -0.2136$ ; распределение инвариантной меры по фазовому портрету хаотического аттрактора при  $F = -0.2137$  (г).

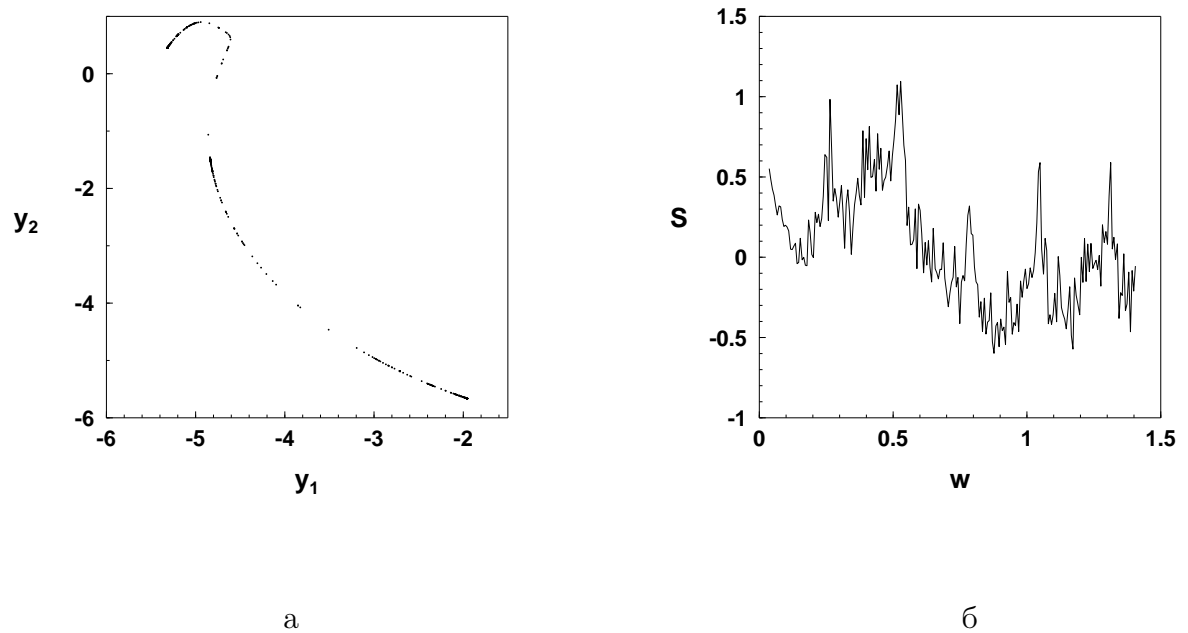


Рис. 3.18: Сечение Пуанкаре (а) и распределение спектральной плотности (б) хаотического аттрактора при  $F = -0.2137$ .

такие особенности и структуры, которые наблюдались при положительных значениях  $F$ .

### 3.2.3 Карта динамических режимов

Очень полное и наглядное представление о поведении динамической системы дает карта динамических режимов - диаграмма на плоскости, где по осям координат отложены два параметра и показаны границы областей различных динамических режимов. Так как в исследуемой системе (3.11) число параметров больше двух, то подробная карта динамических режимов состоит из многих листов.

Остановимся на методике построения карты динамических режимов. Плоскость каких-либо выбранных параметров системы разбивается, при помощи вертикально-горизонтальной сетки, на точки, близко отстоящие одна от другой. В каждой сеточной точке численно решается система уравнений (3.11) и определяется старший ляпуновский характеристический показатель.

Основная диагностика установившегося режима системы, в рассчитываемой сеточной точке плоскости параметров  $E$ ,  $F$ , проводится по знаку старшего ляпуновского характеристического показателя. Если старший ляпуновский показатель положительный, то установившийся режим системы является хаотическим, а если соответствующий показатель отрицательный, то установившийся режим является положением равновесия. Если же старший ляпуновский характеристический показатель в сеточной точке равен нулю, то установившийся режим системы может быть либо периодическим, либо квазипериодическим. Для уточнения типа установившегося режима анализируется второй показатель в спектре ЛХП. Если второй показатель отрицательный, то установившийся режим является периодическим, а если этот показатель нулевой, то установившийся режим – квазипериодический. Особенно тщательно необходимо анализировать ситуации, при которых ляпуновские показатели, по абсолютной величине, сравнимы с погрешностью метода численного интегрирования (это соответствует случаю, когда мы находимся достаточно близко к границам областей динамических режимов разных типов). В таких случаях для точной идентификации типа установившегося режима, дополнительно проводится изучение фазовых портретов, сечений и отображений Пуанкаре, а также Фурье-спектров. После установления типа динамического режима в какой-либо сеточной точке пикселю экрана компьютера, соответствующему данной точке плоскости параметров  $E$ ,  $F$ , присваивается определенный цветовой код. На экране компьютера получается некоторая цветовая мозаика, дающая наглядное представление о расположении динамических режимов разных типов на плоскости параметров системы (3.11).

Приведем один из листов данной карты [114], построенной для параметров  $E$  (крутизны статической характеристики электродвигателя) и  $F$ , который кроме параметров статической характеристики двигателя также зависит от длины маятника и кривошипа. Фактически получаемая двупараметрическая карта динамических режимов является мультипараметрической. Она

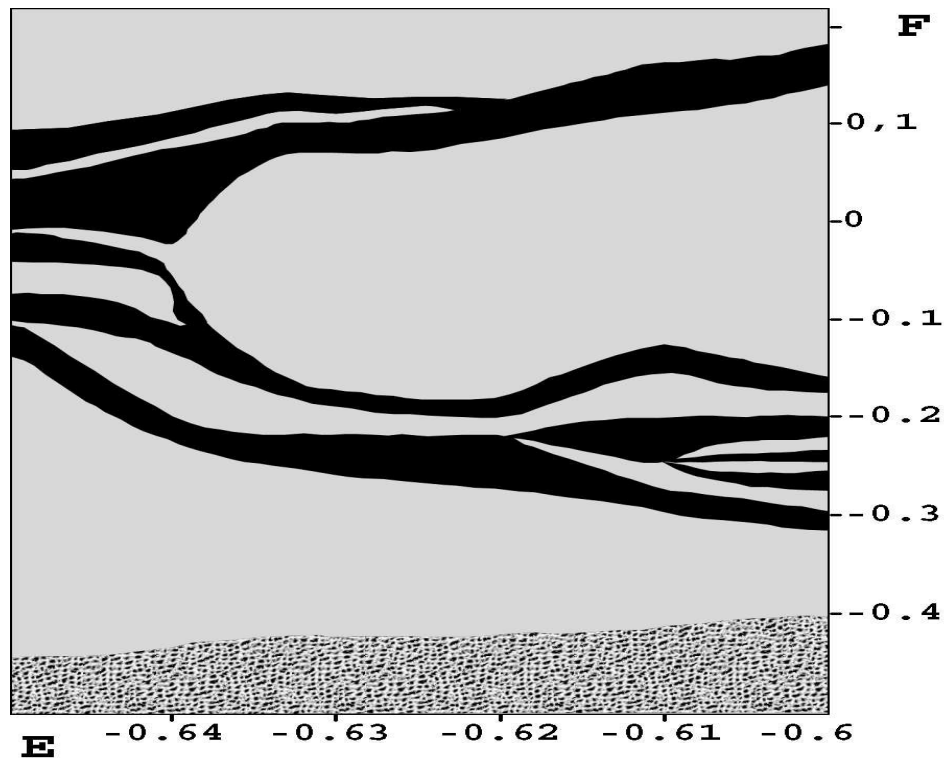


Рис. 3.19: Карта динамических режимов.

может быть преобразована в карты, показывающие зависимость динамических режимов системы (3.11) от изменений  $E$  (крутизна статической характеристики двигателя) и, соответственно,  $a$  (длина кривошипа),  $l$  (приведенная длина маятника),  $\omega_0$  (собственная частота маятника). При проведении расчетов по построению карты динамических режимов предполагалось, что  $C = -0.1$ ,  $D = -0.5$ . На рис. 3.19 приведен, полученный в результате анализа и обработки результатов численных расчетов, один из листов карты динамических режимов системы "маятник-электродвигатель". Серые области карты соответствуют периодическим динамическим режимам, черные - хаотическим, а зернистые - положениям равновесия системы. Как видно из рис. 3.19, хаотические режимы на карте представляются в виде некоторой "реки", многочисленные рукава которой, "протекают" через области периодических режимов. Положения равновесия системы (3.11) наблюдаются в области расположенной у нижнего края карты. В предыдущем параграфе нами было проведено детальное исследование типа динамических режимов



и сценариев переходов между режимами разных типов вдоль вертикального разреза карты по линии  $E = -0.61$ . Как вытекает из этого исследования, при увеличении масштаба карты динамических режимов на ней будут появляться новые очень тонкие "рукава" хаотической "реки", соответствующие окнам периодичности в областях хаотических режимов.

Остановимся еще на одной важной характеристике раннее исследованных хаотических аттракторов – фрактальной размерности. Как мы уже упоминали в п.2.5, все хаотические аттракторы являются фрактальными множествами и имеют дробную размерность Хаусдорфа–Безиковича (фрактальную размерность). В отличие от хаотических, размерность Хаусдорфа–Безиковича для регулярных аттракторов будет целой. Она, соответственно, равна нулю для положений равновесия, единице для предельных циклов и двум для квазипериодических аттракторов.

В общем случае многомерной динамической системы очень трудно вычислить фрактальную размерность для нерегулярного аттрактора. Однако так как мы рассматриваем динамическую систему размерность фазового пространства которой равна трем, то для систем с такой размерностью фазового пространства справедлива гипотеза Каплана–Йорка, с которой мы познакомились в п.2.5. Обозначим фрактальную размерность аттрактора через  $D_{Fr}$ , а через  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – показатели упорядоченного по убыванию спектра ЛХП. Тогда, в силу гипотезы Каплана–Йорка, фрактальная размерность хаотического аттрактора системы с трехмерным фазовым пространством может быть вычислена по формуле (2.23).

Как мы уже говорили в п.2.3, сумма ляпуновских характеристических показателей равна дивергенции системы [5, 62], то есть,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{div} V f. \quad (3.19)$$

Исследуемая система имеет постоянную отрицательную дивергенцию, которая определяется по формуле (3.12). Кроме того, для хаотического аттрактора  $\lambda_2 = 0$ . Поэтому, учитывая (2.23) и (3.19), формулу для определения

фрактальной размерности хаотического аттрактора, в нашем случае, можно записать в виде:

$$D_{Fr} = 2 + \frac{\lambda_1}{|2C + E - \lambda_1|}. \quad (3.20)$$

То есть, для вычисления фрактальной размерности хаотического аттрактора достаточно рассчитать только старший ляпуновский показатель.

На рис. 3.20а приведена зависимость фрактальной размерности системы от значений параметра  $F$ . Соответственно, на рис. 3.20б приведен увеличенный фрагмент рис. 3.20а. Отметим, что приведенные графики качественно подобны графикам приведенным на рис. 3.2а–б, так как основой для их построения служат, рассчитываемые при помощи алгоритма Бенеттина и др. старшие ляпуновские характеристические показатели. Построенный график также может использоваться для идентификации типа установившегося режима системы (3.11). Как видно из приведенного рисунка, в рассмотренном интервале изменения  $F$  у системы существуют два типа аттракторов. А именно, предельные циклы, которым соответствуют те значения  $F$ , для которых фрактальная размерность равна единице, и хаотические аттракторы, соответствующие тем значениям  $F$ , для которых фрактальная размерность больше двух. Области хаоса хорошо определяются из рис. 3.20а, где для удобства идентификации проведена пунктирная линия  $D_{Fr} = 2$ . Внимательное изучение рис. 3.20б показывает, что хаотические аттракторы, существующие при положительных значениях  $F$ , имеют, в среднем, большее значение фрактальной размерности. Кроме некоторого усложнения самоподобия геометрической структуры аттрактора это означает и большую скорость разбегания близких фазовых траекторий.

В заключение еще раз подчеркнем, что возможность возникновения странных аттракторов в системе "маятник-электродвигатель" связана исключительно с взаимодействием между ее подсистемами – "маятником" и "электродвигателем", а не с автономными свойствами этих подсистем. Применение методов редукции приводит к тому, что моделирующая динамику си-

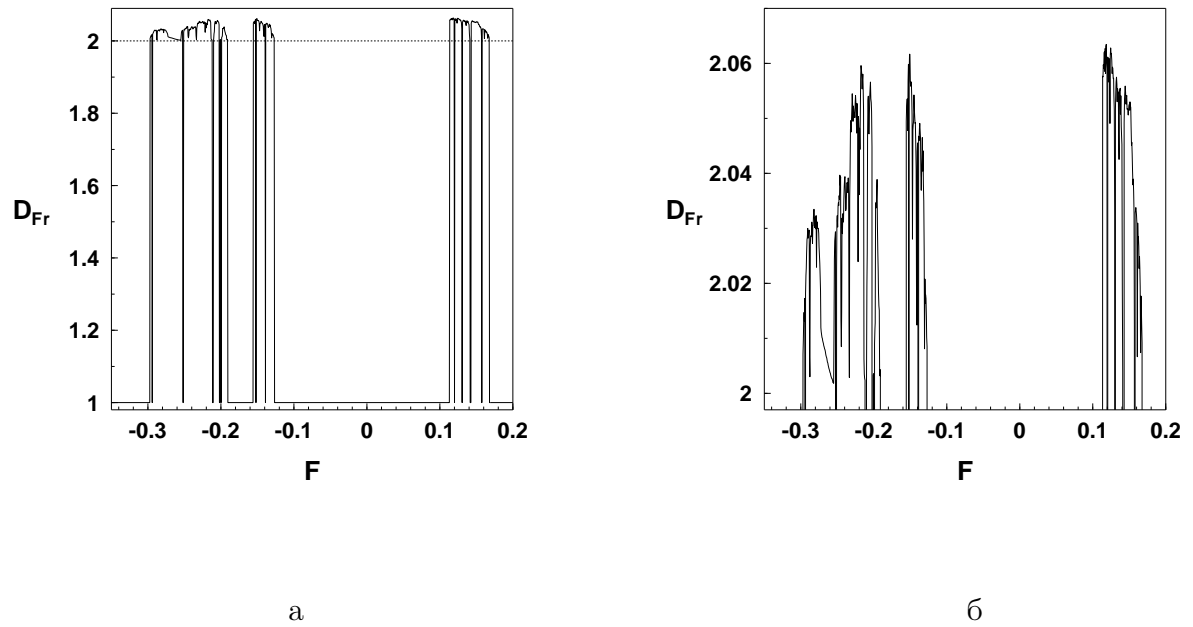


Рис. 3.20: Фрактальная размерность аттракторов.

система дифференциальных уравнений расщепляется на две подсистемы. А именно "маятниковую", которая имеет двумерное фазовое пространство, и "двигательную" с одномерным фазовым пространством. Эти расщепленные системы решаются независимо одна от другой. Совершенно очевидно, что в таких подсистемах невозможно существование хаотических аттракторов, так как минимальная размерность фазового пространства, при которой возможно существование детерминированного хаоса, равна трем [5, 62]. Поэтому применение редукционных подходов приводит к полной потере информации о реально существующих хаотических аттракторах.

### 3.3 Сферический маятник

Сферический маятник является самым простым примером осциллятора с двумя степенями свободы, имеющего равные частоты. Многие явления, характерные для сферического маятника, проявляются в динамике систем с распределенными параметрами, имеющими периодическую координату: ко-

лец, цилиндрических и сферических оболочек, круглых пластин, сред в цилиндрических и сферических полостях. Поэтому знание свойств колебательных процессов сферического маятника дает понимание колебательных эффектов в ряде вышеупомянутых систем.

Рассмотрим систему, схема которой представлена на рис. 3.21. Кривошипно-шатунный механизм соединяет ротор электродвигателя с точкой подвеса физического маятника, который, в отличие от параграфа 1.2, может совершать пространственные колебания. Как известно, такой маятник называется сферическим. Введем декартову систему координат  $Oxyz$

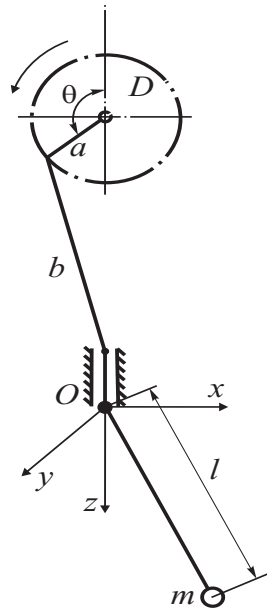


Рис. 3.21: Схема рассматриваемой системы.

как показано на рис. 3.21. Обозначим через  $a, b$  длину кривошипа и шатуна, соответственно. Предположим, что  $b \gg a$ . Когда кривошип  $a$  поворачивается на угол  $\Theta$ , ползун с подвесом получает перемещение вдоль вертикальной оси неподвижной системы координат, вида  $v(t) = -a \cos \Theta$  (см. рис. 3.21). В неподвижной декартовой системе координат  $Oxyz$  кинетическая энергия системы "маятник-электродвигатель" записывается в форме [37, 199, 201]

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\dot{v} + \dot{z})^2], \quad (3.21)$$

а потенциальная

$$V = mg(l - z - v), \quad (3.22)$$

где  $x, y, z$  – декартовы координаты центра масс маятника;  $I$  – момент инерции ротора электродвигателя;  $m$  – масса маятника;  $l$  – приведенная длина маятника. Массой ползуна и подвеса мы пренебрегаем.

Следуя работе [199], введем новые переменные  $\alpha$  и  $\beta$  по формулам:

$$x = l \sin \alpha, \quad y = l \sin \beta.$$

Так как во введенной системе координат  $Oxyz$  для маятника всегда выполняется соотношение

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

то

$$z = l \sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$

Для малых  $\alpha$  и  $\beta$  лагранжиан исследуемой системы T-V представим в виде [54, 179, 199, 201]:

$$\begin{aligned} T - V = & \frac{1}{2} I \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 [\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 2\alpha\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - 2(\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta})\dot{\Theta} \frac{a}{l} \sin \Theta + \dot{\Theta}^2 \frac{a^3}{l^2} \sin^2 \Theta] - \\ & - gml \left( \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{24} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^4}{24} + \frac{\alpha^2 \beta^2}{4} + \frac{a}{l} \cos \Theta \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Поэтому для основных переменных  $\Theta(t)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  уравнения Лагранжа (уравнения движения) запишутся в следующей форме [54, 176, 179]:

$$\begin{aligned} I \ddot{\Theta} = & L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) - mla \left[ \ddot{\Theta} \frac{a}{l} \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2 \frac{a}{l} \sin \Theta \cos \Theta + \frac{g}{l} \sin \Theta - \right. \\ & \left. - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \sin \Theta - (\alpha \ddot{\alpha} + \beta \ddot{\beta}) \sin \Theta \right]; \\ \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \left( \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha \beta^2}{2} \right) + \delta_1 \dot{\alpha} + \alpha (\dot{\beta}^2 + \beta \ddot{\beta}) - \\ & - \frac{a}{l} \alpha (\dot{\Theta}^2 \cos \Theta + \ddot{\Theta} \sin \Theta) = 0; \\ \ddot{\beta} + \omega_0^2 \left( \beta - \frac{\beta^3}{6} + \frac{\alpha^2 \beta}{2} \right) + \delta_1 \dot{\beta} + \beta (\dot{\alpha}^2 + \alpha \ddot{\alpha}) - \\ & - \frac{a}{l} \beta (\dot{\Theta}^2 \cos \Theta + \ddot{\Theta} \sin \Theta) = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь  $L(\dot{\Theta})$ –движущий момент электродвигателя;  $H(\dot{\Theta})$ –внутренний момент сил сопротивления вращению ротора электродвигателя;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  – собственная частота маятника;  $\delta_1$ –коэффициент демпфирования силы сопротивления среды, в которой движется маятник.

Полученная система дифференциальных уравнений описывает сложный процесс взаимодействия вращения вала двигателя (формирование возбуждающей силы) и пространственных колебаний маятника. Она является существенно нелинейной и не допускает точного аналитического решения. Для упрощения системы уравнений (3.24) введем малый параметр  $\varepsilon = \frac{a}{l}$ , полагая  $a \leq l$ . Кроме того, предположим, что реализуются условия основного параметрического резонанса, когда скорость вращения вала двигателя  $\dot{\Theta}$  близка к удвоенной собственной частоте маятника  $2\omega_0$ , а именно

$$\dot{\Theta}(t) = 2\omega_0 + \varepsilon\omega_0\nu(t). \quad (3.25)$$

Для исследования резонансных колебаний маятника выполним в уравнениях (3.24) замену переменных по формулам [54, 179]:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}[y_1(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} + y_2(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2}]; \\ \beta(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}[y_4(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} + y_5(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2}]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Посредством данной замены мы переходим в уравнениях (3.24) к новым переменным  $y_1(\tau), y_2(\tau), y_4(\tau), y_5(\tau)$  и медленному времени  $\tau$ ,

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4}\Theta(t). \quad (3.27)$$

Подставим выражения (3.26) в уравнения (3.24) и проведем процедуру усреднения, используя методику работы [132], по быстрому, явно входящему, времени  $\Theta(t)$ . При этом учтем, что [13, 37]

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha(t)}{dt} &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{d\Theta(t)}{dt} [-y_1(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} + y_2(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2}]; \\ \frac{d\beta(t)}{dt} &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{d\Theta(t)}{dt} [-y_4(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} + y_5(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2}]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

После проведения процедуры усреднения по быстрому времени получим следующую систему уравнений [54, 179]:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{d\tau} &= Cy_1 - [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_2 - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_4 + 2y_2; \\
\frac{dy_2}{d\tau} &= Cy_2 + [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_1 - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_5 + 2y_1; \\
\frac{dy_3}{d\tau} &= D(y_1y_2 + y_4y_5) + Ey_3 + F; \\
\frac{dy_4}{d\tau} &= Cy_4 - [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_5 + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_1 + 2y_5; \\
\frac{dy_5}{d\tau} &= Cy_5 + [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_4 + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_2 + 2y_4.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

При выводе системы уравнений (3.29) использовалась линейная аппроксимация ([37]) статической характеристики двигателя, когда

$$\frac{L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta})}{I + \frac{1}{2}ma^2} = \varepsilon \frac{\omega_0}{2}(N_0 - E\dot{\Theta}) + \varepsilon^2 \dots \tag{3.30}$$

Поэтому ([54])

$$F = (\frac{N_0}{\omega_0} - 2E)\frac{l}{a}, \quad D = -\frac{2ml^2}{I + \frac{1}{2}ma^2}, \quad C = -\frac{\delta_1}{\omega_0}.$$

Кроме того, в системе (3.29) введено обозначение  $y_3 = \nu$ .

Полученная система дифференциальных уравнений пятого порядка (3.29) используется в качестве математической модели детерминированной колебательной динамической системы "сферический маятник-электродвигатель". Заметим, что большинство исследований динамики сферического маятника проводилось и проводится в предположении, что источник возбуждения колебаний маятника идеальный, то есть имеет неограниченную мощность. Разумеется, такой подход приводит к предположению о неограниченности мощности электродвигателя, возбуждающего колебания маятника. То есть имеет место своеобразная реализация концепции "вечного двигателя". С целью преодоления такого концептуального противоречия допускают, что мощность электродвигателя не неограниченна, а столь велика,

что маятник оказывает пренебрежимо малое влияние на вращение вала электродвигателя. Покажем к каким грубым ошибкам в определении установившихся колебаний маятника приводит такая идеализация источника возбуждения колебаний.

При идеализации источника возбуждения, система уравнений (3.29) расщепляется на две подсистемы. Одна подсистема состоит из первого, второго, четвертого и пятого уравнений системы (3.29). Вторая подсистема состоит из одного третьего уравнения системы (3.29). Причем, так как влиянием колебаний маятника на вращение вала двигателя пренебрегают, в этом уравнении полагают  $D = 0$ . Тогда третье уравнение (3.29) становится линейным и для него элементарно может быть найдено общее решение (функция  $y_3$ ), которое затем подставляется в первую подсистему. В дальнейшем можно проводить исследование решений первой, "маятниковой", подсистемы. Заметим, что при применении идеализации источника возбуждения, как установлено в обобщающих работах [204, 205], не удастся обнаружить хаотических установившихся колебаний маятника при вертикальном возбуждении точки его подвеса.

Дальнейшей целью исследования является изучение возможных типов аттракторов системы уравнений (3.29). Так как данная система является достаточно сложной нелинейной системой уравнений, то для построения ее аттракторов применяется целый комплекс численных методов и алгоритмов. Методика проведения таких исследований детально изложена в п.3.2.2.

При проведении численных расчетов полагалось, что параметры системы (3.29) имеют следующие значения:

$$C = -0.5, \quad D = -1, \quad F = 0.5. \quad (3.31)$$

Начальные условия варьировались в окрестности начала координат фазового пространства системы уравнений (3.29).

В качестве бифуркационного рассматривался параметр  $E$ —угол наклона статической характеристики электродвигателя, зависящий от типа применяе-



мого двигателя. Покажем, что при так выбранных значениях в пространстве параметров системы (3.29) существуют большие области, в которых у нее возникают хаотические аттракторы.

Исследование идентификации типов аттракторов системы (3.29) начинаем с расчета старшего ляпуновского характеристического показателя. Напомним, что положительность такого показателя является основным практическим критерием хаотического поведения системы. На рис. 3.22 приведена зависимость старшего ляпуновского характеристического показателя  $\lambda$  от угла наклона статической характеристики  $E$ . Как видно из приведенного рисунка, практически для всех  $E \in (-1.27, -0.1)$  у системы существуют хаотические аттракторы. На графике также видны провалы значения старшего ляпуновского показателя, которые соответствуют узким окнам периодичности. Этих окон больше в левой части графика.

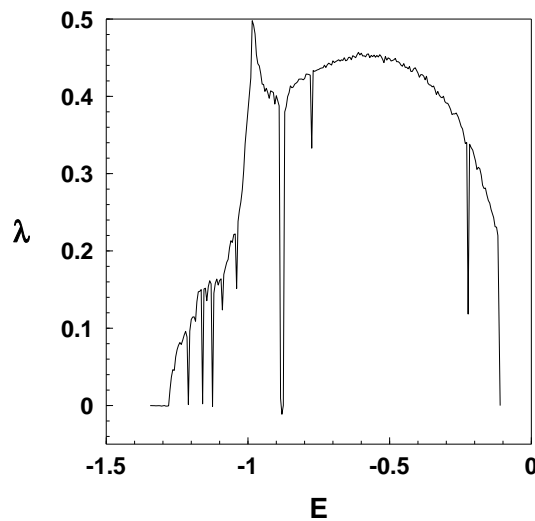


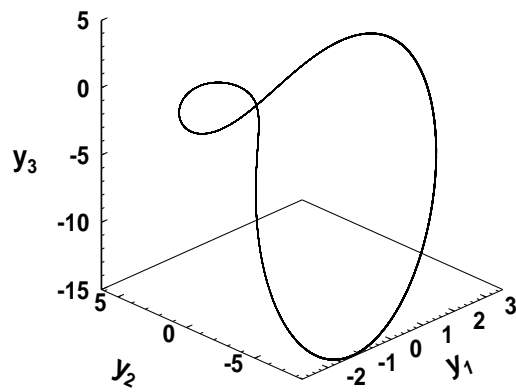
Рис. 3.22: Зависимость старшего ляпуновского характеристического показателя от угла наклона статической характеристики.

При значениях  $E \geq -1.75$  в системе (3.29) существует устойчивый предельный цикл достаточно простой структуры. При  $E = -1.42$  такой цикл

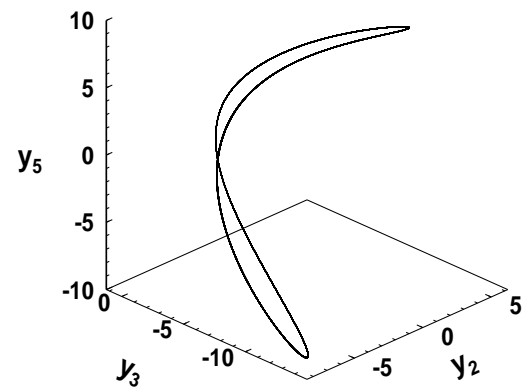
теряет устойчивость и в его окрестности возникает устойчивый предельный цикл удвоенного периода. Происходит первая бифуркация удвоения периода цикла. При дальнейшем возрастании значений  $E$  в системе продолжается каскад бифуркаций удвоения. Проекция фазового портрета цикла и нескольких бифуркаций удвоения его периода приведены на рис. 3.23 и рис. 3.24. Одна из приведенных на рисунках проекций включает переменные  $y_1, y_2$ , пропорциональные маятниковой угловой переменной  $\alpha$ , и переменную  $y_3$ , характеризующую вращение вала электродвигателя. Вторая, из приведенных на рисунках проекций, включает по одной компоненте из маятниковых переменных  $\alpha, \beta$  и переменную  $y_3$ . На рисунках хорошо заметно удвоение тактности предельных циклов с каждой последующей бифуркацией. Этот бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода цикла завершается рождением хаотического аттрактора в критической точке  $E \approx -1.275$ . Таким образом, переход к хаосу совершается в соответствии со сценарием Фейгенбаума [54, 179].

На рис. 3.25.а–б приведены проекции возникшего в результате каскада бифуркаций удвоения хаотического аттрактора. Этот аттрактор имеет спиральную структуру и несколько напоминает хаотические аттракторы найденные нами для плоского маятника. Следует подчеркнуть, что такие хаотические аттракторы обладают некоторой, иногда довольно значительной, похожестью фазового портрета на фазовые портреты циклов большой тактности, при бифуркациях которых рождаются эти хаотические аттракторы. Однако здесь имеется одно принципиальное отличие. Предельные циклы, несмотря на их как угодно большую тактность, отличаются регулярным возвращением траектории в любую точку цикла через время, строго равное периоду цикла. В случае же хаотического аттрактора картина совершенно иная. Траектория обязательно бесконечное число раз возвращается в любую, как угодно малую, окрестность аттрактора, но время таких возвратов непредсказуемо. Моменты времени этих возвратов образуют некоторую хаотическую последовательность [122].

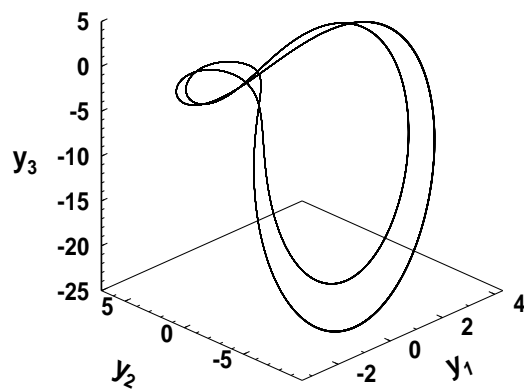
На рис. 3.25.в–г приведены проекции сечения Пуанкаре, плоскостью



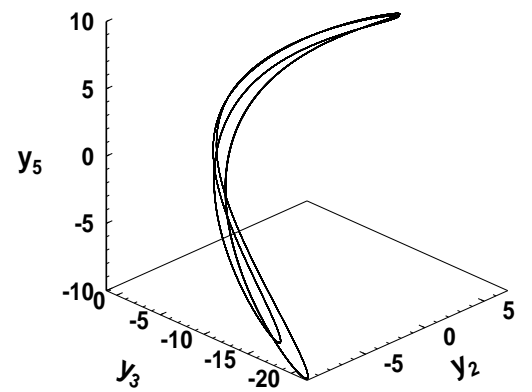
а



б

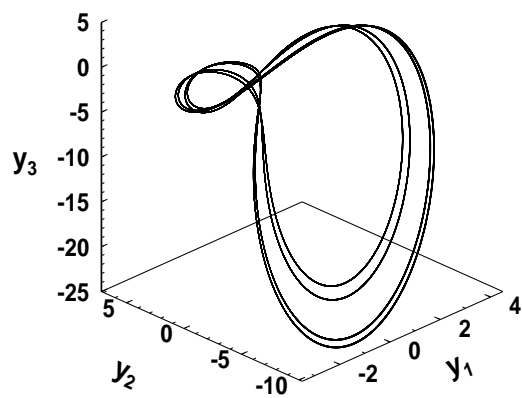


в

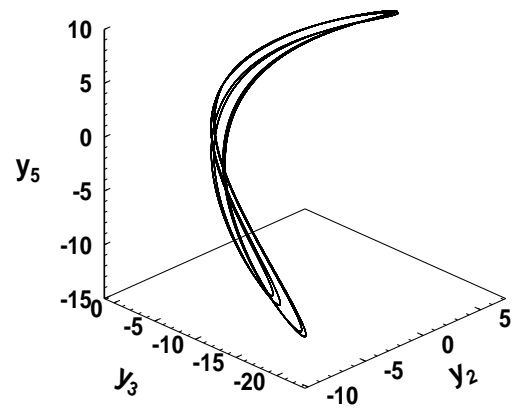


г

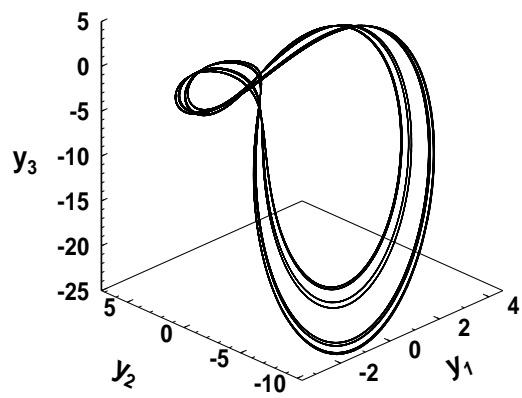
Рис. 3.23: Проекции фазового портрета предельного цикла при  $E = -1.43$  (а), (б) и первой бифуркации удвоения при  $E = -1.31$  (в), (г).



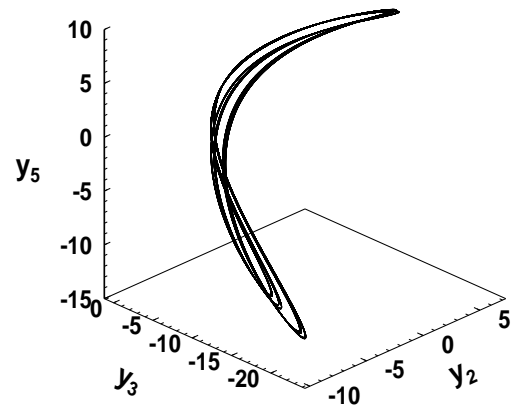
а



б

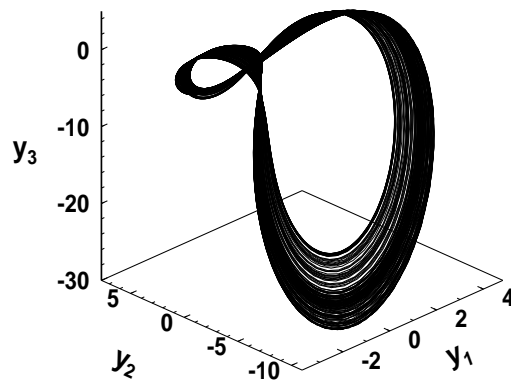


в

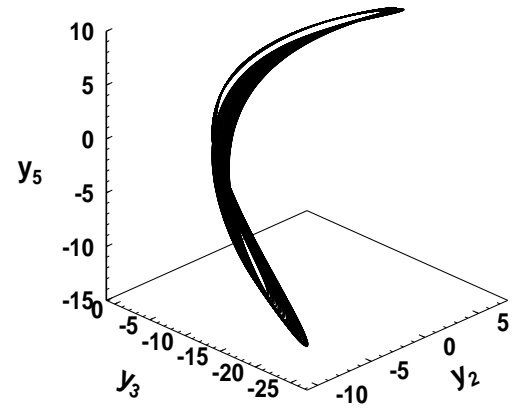


г

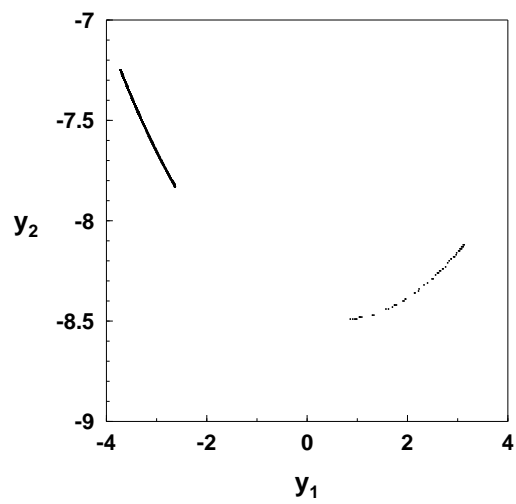
Рис. 3.24: Проекция фазового портрета второй бифуркации удвоения при  $E = -1.29$  (а), (б) и третьей бифуркации удвоения при  $E = -1.28$  (в), (г).



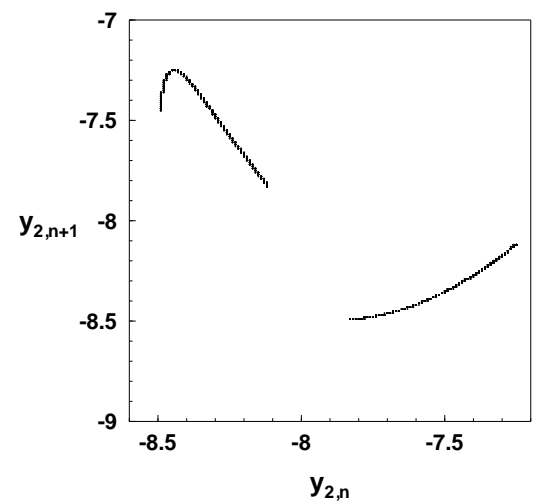
а



б



в



г

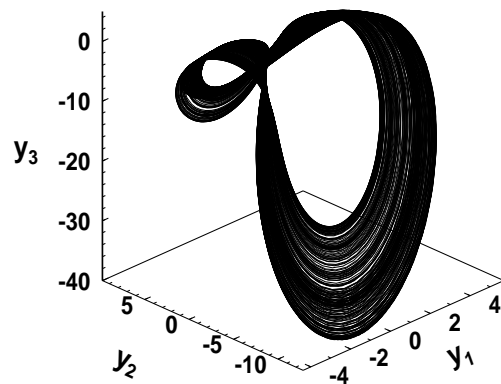
Рис. 3.25: Проекция фазового портрета хаотического аттрактора при  $E = -1.25$  (а), (б) его сечение (в) и отображение Пуанкаре (г).

$y_3 = -15$ , и отображение Пуанкаре по переменной  $y_2$ . Как видно из приведенных рисунков, сечение Пуанкаре имеет квазиленточную структуру. Число точек этого сечения постоянно растет с ростом времени численного интегрирования. Его точки образуют некоторое хаотическое множество точек. Соответственно отображение Пуанкаре по форме напоминает одномерную кривую с локальным максимумом. Это может служить доказательством того, что система (3.29) находится в хаотическом режиме [5, 62]. Данное одномерное отображение может служить для приближенного изучения динамики системы. Естественно, что исследование одномерных отображений намного проще исследования систем дифференциальных уравнений с размерностью фазового пространства равной пяти. Кроме того, такой вид отображения Пуанкаре свидетельствует о том, что система (3.29) принадлежит к одному из классов универсальности динамических систем, введенных Фейгенбаумом [5, 62, 151, 152, 153]. Таким образом, обнаруженный хаотический аттрактор обладает некоторым качественным подобием с хаотическими аттракторами, найденными у плоского маятника. Кстати, старший ляпуновский характеристический показатель построенного хаотического аттрактора равен 0.072. Такая величина показателя близка к величинам старших ляпуновских показателей хаотических аттракторов плоского маятника. Отметим еще одну особенность обнаруженных аттракторов системы как регулярных, так и хаотических. Они обладают симметрией фазовых портретов по переменным  $y_1, y_2$  и  $y_4, y_5$ , соответственно. Это объясняется симметрией уравнений (3.29) относительно данных переменных.

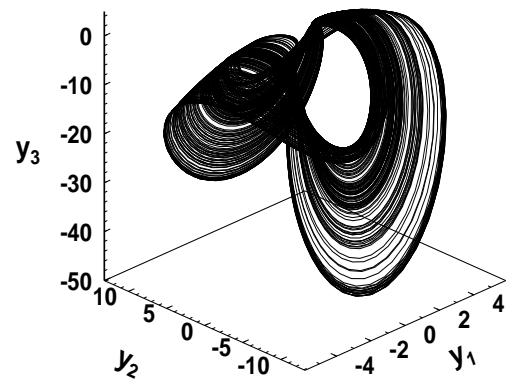
Как мы уже установили ранее, возникшие в системе (3.29) при  $E \approx -1.275$  хаотические установившиеся режимы продолжают существовать на очень значительном интервале изменения  $E$ . При возрастании значения  $E$  в системе наблюдаются структурные перестройки типа "хаос–хаос", то есть хаотический аттрактор одного типа в результате внутренних бифуркационных явлений сменяется хаотическим аттрактором другого типа. Проследим за изменением свойств хаотических аттракторов при возрастании  $E$ .

При  $-1.27 \leq E \leq -1.18$  наблюдается развитие хаотического аттрактора, заключающееся в увеличении объема области в фазовом пространстве, в которой находятся траектории аттрактора, и более плотном заполнении этой области траекториями аттрактора. Проекция фазового портрета хаотического аттрактора, построенного при  $E = -1.18$  приведена на рис. 3.26а. Сечение и отображение Пуанкаре для этого аттрактора качественно идентичны приведенным на рис. 3.25.в–г. Происходит некоторый рост величины старшего ляпуновского показателя, который при  $E = -1.18$  достигает значения 0.134. При  $E = -1.17$  накапливающиеся количественные изменения приводят к заметной перестройке структуры существовавшего хаотического аттрактора. Проекция фазового портрета такого аттрактора, его сечение и отображение Пуанкаре приведены на рис. 3.26б–г. Как видно из рисунков, что особенно заметно, по сравнению с приведенными на рис. 3.25в–г, изменились сечение и отображение Пуанкаре аттрактора, хотя сечение Пуанкаре по прежнему имеет квазиленточную структуру [122].

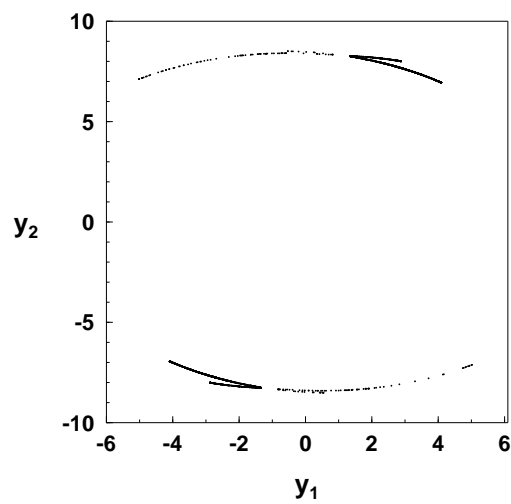
При дальнейшем росте  $E$  наблюдается очень заметное увеличение фазового объема области локализации траекторий аттрактора, особенно по направлению переменной  $y_3$ , [54, 179], что отлично согласуется с теорией В.О.Кононенко. Заметно до 0.34 возрастает старший ляпуновский характеристический показатель, что свидетельствует о значительном увеличении скорости разбегания близких фазовых траекторий аттрактора. На рис. 3.27 приведены, соответственно, проекции фазового портрета, сечения и отображения Пуанкаре хаотического аттрактора при  $E = -1.01$ . Очень своеобразный вид приобретает двумерная проекция фазового портрета. Возникший "двухглазый" аттрактор очень напоминает известную "бабочку" аттрактора Лоренца, что свидетельствует о тесной связи различных типов хаотических аттракторов из разных разделов нелинейной динамики. Как и у всех ранее рассмотренных в этом параграфе хаотических аттракторов, сечение Пуанкаре (рис. 3.27в) имеет квазиленточную структуру. Но очень заметно усложнилось отображение Пуанкаре (рис. 3.27г), которое представляет су-



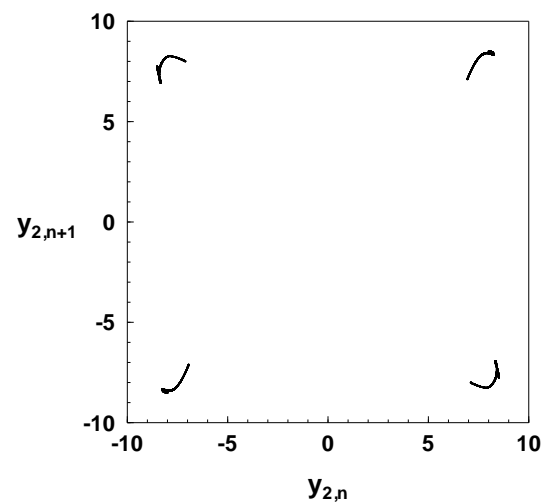
а



б



в



г

Рис. 3.26: Проекция фазового портрета хаотического аттрактора при  $E = -1.18$  (а); проекция фазового портрета (б), сечение (в) и отображение Пуанкаре (г) хаотического аттрактора при  $E = -1.17$ .



перпозицию нескольких линий типа парабол [122].

Следует отметить, что в интервале изменения параметра  $-1.27 \leq E \leq -1.01$  области хаоса чередуются с небольшими окнами периодичности, которые здесь не исследовались.

При прохождении параметром  $E$  точки  $-1.0$  в системе происходит жесткая бифуркация типа "хаос–хаос", в результате которой возникает хаотический аттрактор иного типа [54, 179]. На рис. 3.28 приведены различные характеристики нового хаотического аттрактора. Как видно из рисунка, происходит поворот проекции фазового портрета. Особенно наглядно это проявляется при сравнении двумерных проекций с рис. 3.27.б и 3.28.б, из которых виден поворот "глаз", произошедший у нового аттрактора по сравнению с ранее существовавшим. Изменяется и сечение Пуанкаре (3.28.в), точки которого начинают разбегаться на секущей плоскости, утрачивая квазиленточную структуру. Очень меняется вид отображения Пуанкаре (рис. 3.28.г), которое теперь представляет собой чрезвычайно сложную суперпозицию линий, среди которых явно просматриваются различные параболы [122].

Такой тип хаотического аттрактора существует, за исключением узкого окна периодичности, на всем дальнейшем исследованном интервале изменения значений  $E$ . Однако структура аттрактора претерпевает некоторые изменения при увеличении  $E$  [54, 122, 179]. Так, на рис. 3.29 приведены характеристики хаотического аттрактора, построенного при  $E = -0.61$ . Этот хаотический аттрактор имеет старший ляпуновский показатель равный 0.457, что заметно превосходит аналогичные показатели аттракторов, выявленных нами при  $E < -1$ . Как мы уже отмечали, это свидетельствует о большей скорости разбегания, неустойчивых по Ляпунову, близких в начальный момент времени траекторий аттрактора. При общей схожести фазовых портретов данного аттрактора и, приведенного на рис. 3.28.а–б, отметим исчезновение "глаз" на двумерной проекции фазового портрета. Изменяется, по сравнению с предыдущим случаем, и вид сечения Пуанкаре, точки которого начинают хаотически группироваться вдоль нескольких кривых, отдаленно напо-

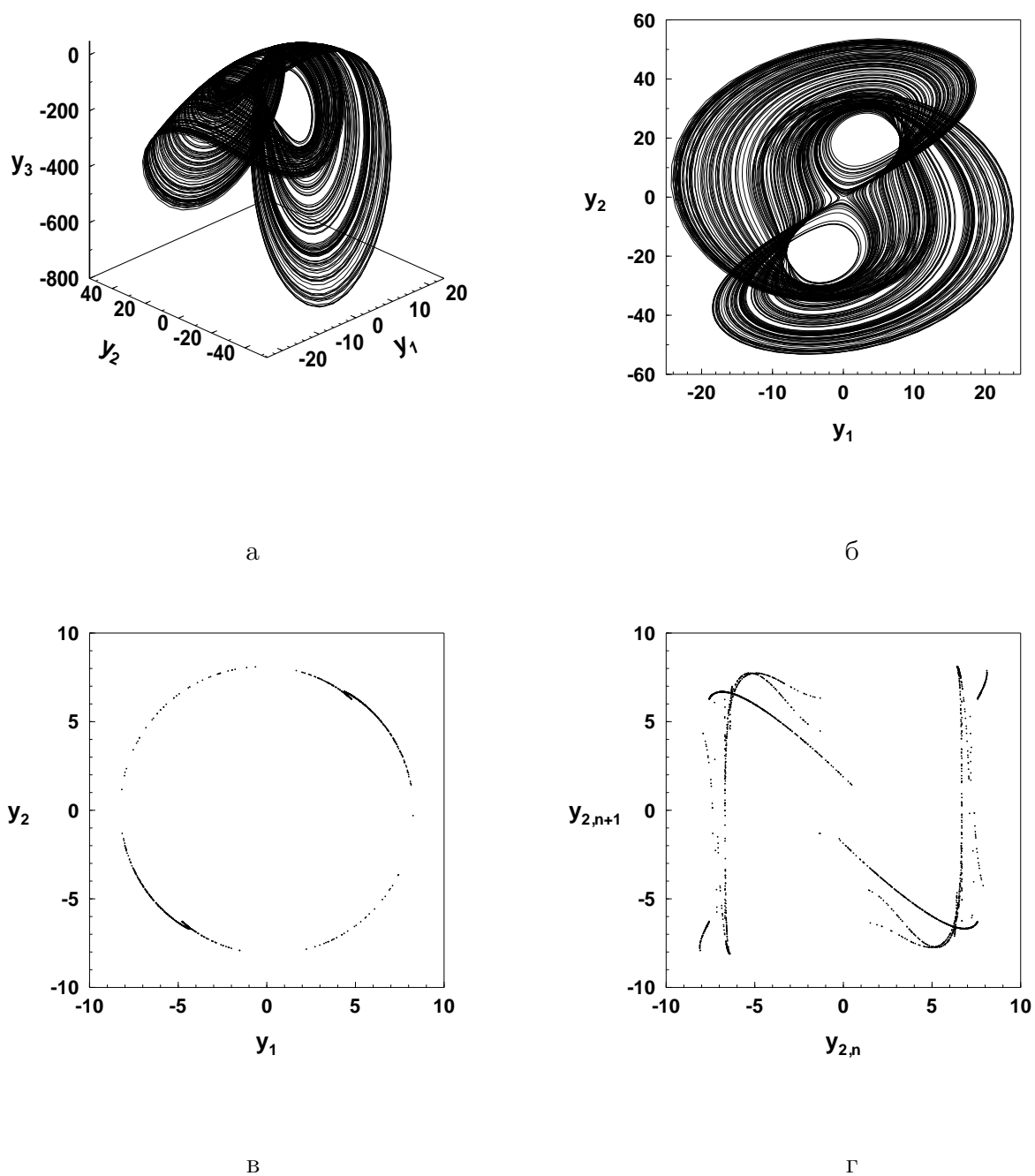


Рис. 3.27: Проекция фазового портрета хаотического аттрактора (а), (б), его сечение (в) и отображение Пуанкаре (г) при  $E = -1.01$ .

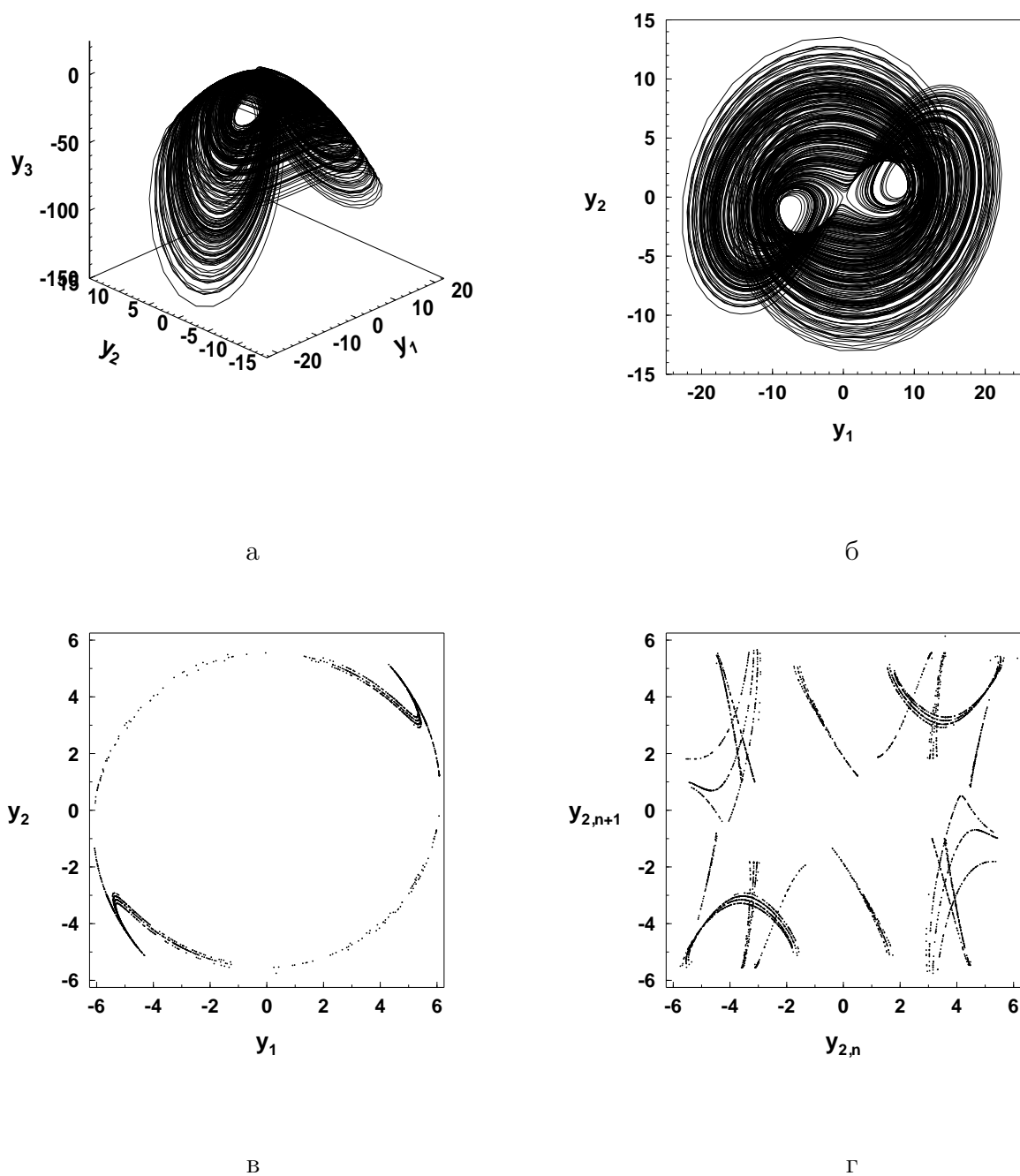


Рис. 3.28: Проекция фазового портрета хаотического аттрактора (а), (б), его сечение (в) и отображение Пуанкаре (г) при  $E = -0.89$ .

минающих концентрические окружности. Еще более усложняется отображение Пуанкаре, что делает невозможной какую-либо одномерную дискретную аппроксимацию рассматриваемой задачи [122].

При дальнейшем увеличении значений  $E$  начинает заметно уменьшаться фазовый объем области, в которой располагается хаотический аттрактор [54, 122, 179]. Наконец, при  $E = -0.1$  происходит разрушение хаотического аттрактора и в системе (3.29) возникает устойчивое положение равновесия. На рис. 3.30 приведено сечение и отображение Пуанкаре, а также распределение естественной инвариантной меры по проекции фазового портрета для хаотического аттрактора, построенного при  $E = -0.12$ , то есть незадолго до его исчезновения. Точки сечения Пуанкаре отчетливо хаотически группируются вдоль кривых, по форме напоминающих концентрические окружности. Отображение Пуанкаре практически приобретает вид некоторого точечного отображения. Очень интересный вид имеет распределение инвариантной меры по фазовому портрету аттрактора (рис. 3.30в). Густое затемнение в центре рисунка показывает, что основное время траектории аттрактора пребывают в окрестности точки  $(0, 0)$ . Эта точка является проекцией неустойчивого положения равновесия системы (3.29). Хаос приобретает структуру, достаточно типичную для перемежаемости. Фазовые траектории данного аттрактора системы пытаются притянуться к нулевому положению равновесия, вследствие чего они длительное время блуждают в малой окрестности этого положения (ламинарная стадия, которой соответствуют густо затемненные участки на рис. 3.30в). Затем, в непредсказуемый наперед момент времени, происходит турбулентный всплеск, сопровождающийся непериодическими раскрутками по виткам спирали аттрактора [122].

Рассмотрим характерные особенности распределения спектральных плотностей (Фурье-спектры) для различных типов аттракторов системы (3.29). Так, на рис. 3.31а–в, приведены распределения спектральных плотностей для некоторых бифуркаций из ранее изученного каскада бифуркаций удвоения периодов предельных циклов системы, которые имели ме-

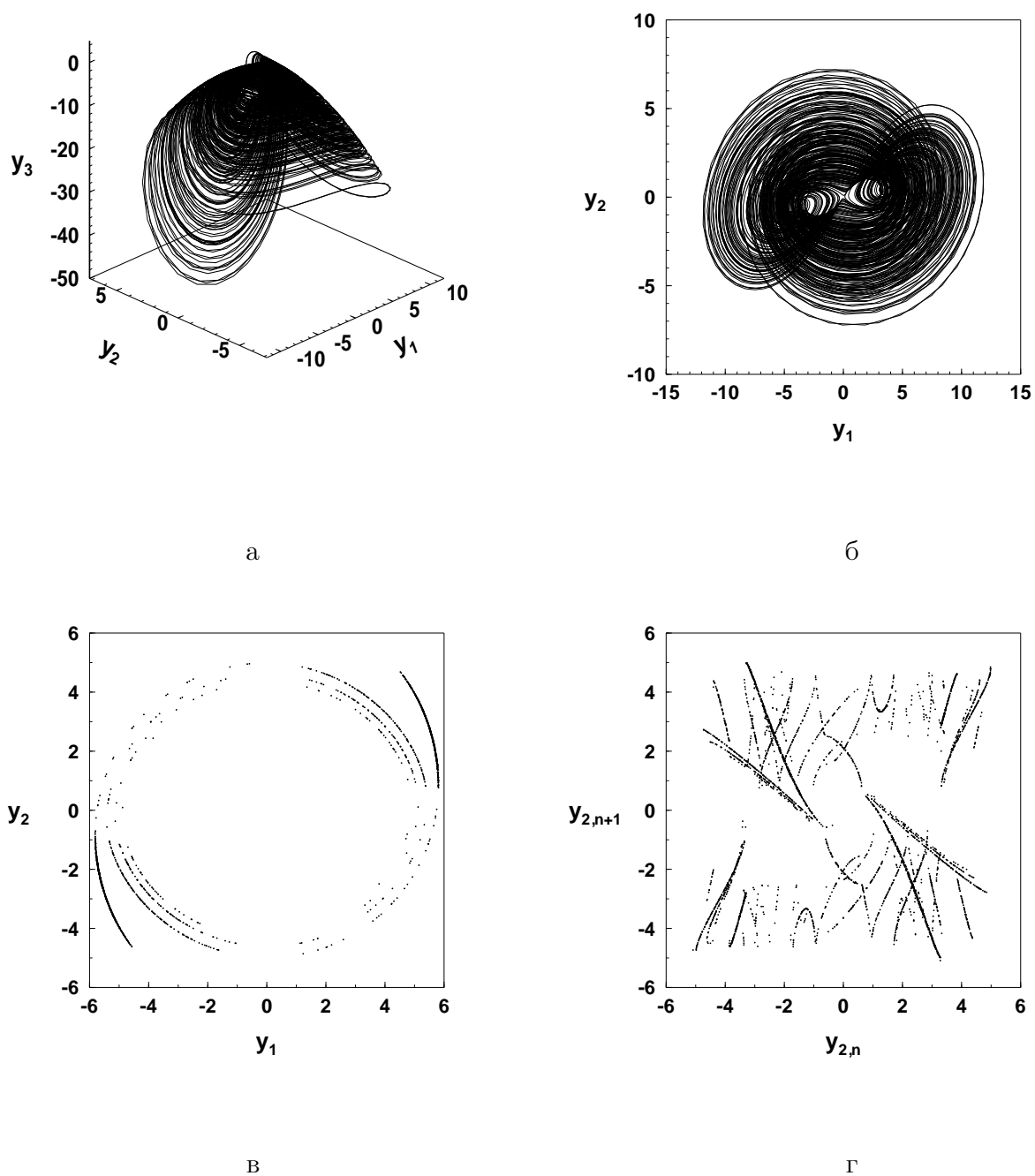
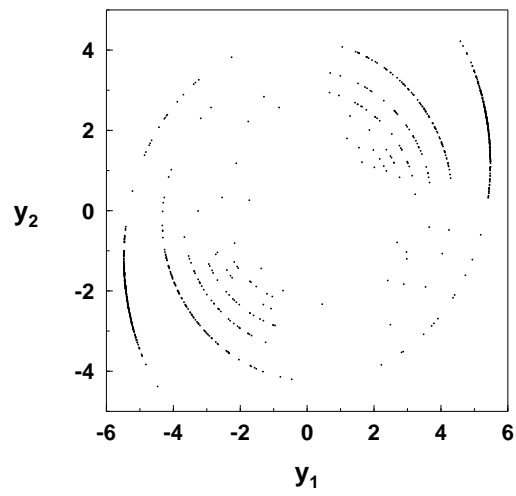
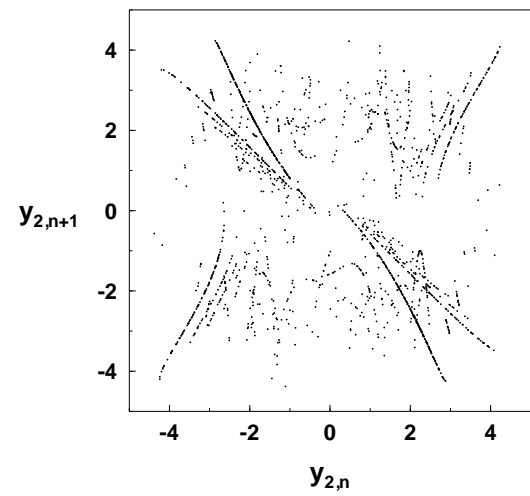


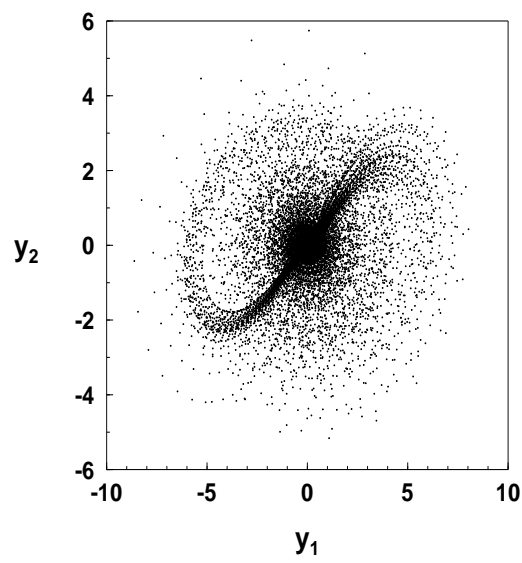
Рис. 3.29: Проекция фазового портрета хаотического аттрактора (а), (б), его сечение (в) и отображение Пуанкаре (г) при  $E = -0.61$ .



а



б



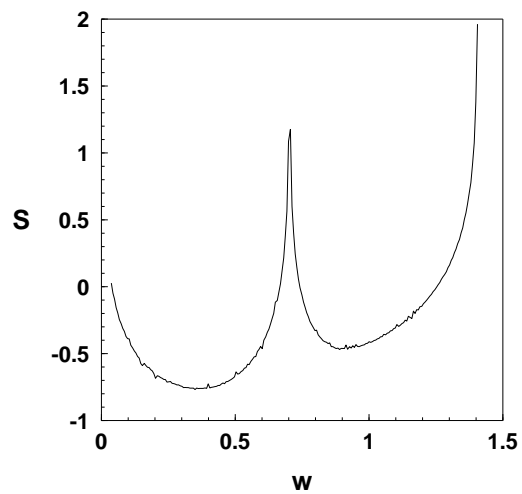
в

Рис. 3.30: Сечение (а), отображение Пуанкаре (б) и распределение инвариантной меры хаотического аттрактора (в) при  $E = -0.12$ .

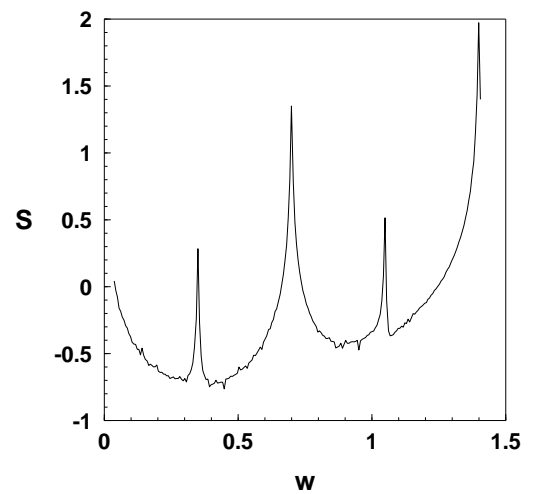
сто для значений  $E \in (-1.45, -1.275)$  (см. рис. 3.23– 3.24). Соответственно на рис. 3.31а приведен Фурье–спектр первой, на рис. 3.31б–второй, а на рис. 3.31в–третьей бифуркации каскада. Все приведенные спектры являются дискретными с четкими пиками на основных гармониках разложения временных реализаций предельных циклов в ряд Фурье. Причем число пиков этих дискретных спектров удваивается с каждой новой бифуркацией. На рис. 3.31г приведен Фурье–спектр хаотического аттрактора, который возникает в результате этого бесконечного каскада. Как видно из рис. 3.31г, спектр становится непрерывным, что является еще одним подтверждением того, что система (3.29) находится в хаотическом режиме. Однако в непрерывном спектре с рис. 3.31г отчетливо видны пики гармоник исчезнувших предельных циклов [122].

Развитие хаоса при возрастании  $E$ , кроме изменений структуры фазового портрета и других характеристик хаотических аттракторов, также приводит к заметным изменениям их Фурье–спектров. Так, на следующем рисунке приведены Фурье–спектры хаотических аттракторов существующих в системе при  $E = -1.17$  (рис. 3.32а) и при  $E = -1.01$  (рис. 3.32б). Спектр, приведенный на (рис. 3.32а), соответствует значению  $E$ , при котором наблюдается заметное изменение структуры фазового портрета хаотического аттрактора по сравнению с фазовым портретом хаоса возникшего в результате каскада бифуркаций удвоения. В свою очередь спектр, приведенный на рис. 3.32б, соответствует хаотическому аттрактору, существующему у правого порога жесткой перестройки хаотических режимов. Оба спектра по прежнему являются непрерывными. Однако по сравнению с ранее рассмотренным случаем начинает наблюдаться разрушение пиков спектра (левый рисунок), которое в конце концов приводит к полному отсутствию пиков в непрерывном спектре аттрактора [122].

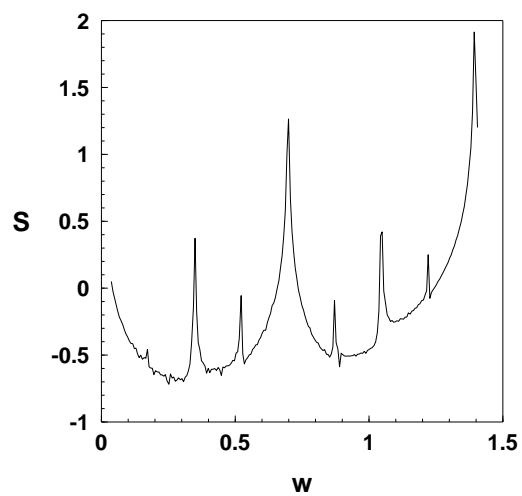
Наконец, рассмотрим Фурье–спектры хаотических аттракторов, существующих в системе после жесткой бифуркации типа "хаос–хаос", то есть при  $E > -1.0$ . На рис. 3.33 приведены спектры двух таких хаотических



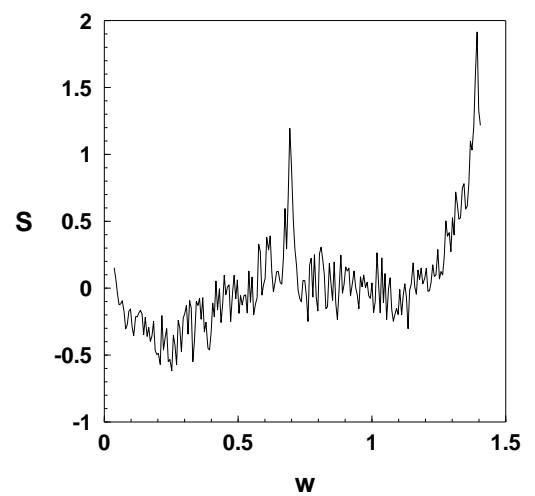
а



б



в



г

Рис. 3.31: Распределение спектральной плотности первых трех бифуркаций удвоения (а), (б), (в) и распределение спектральной плотности хаотического аттрактора при  $E = -1.25(\varrho)$ .



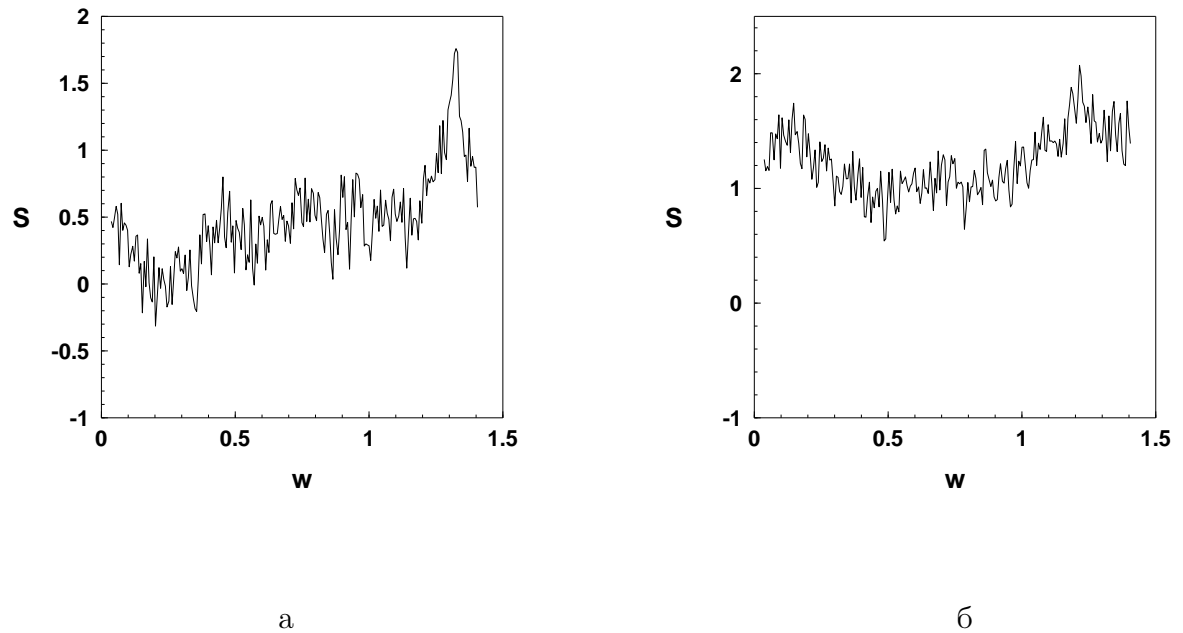


Рис. 3.32: распределение спектральной плотности хаотического аттрактора при  $E = -1.17$  (а) и при  $E = -1.01$  (б) .

аттракторов. Причем рис. 3.33а соответствует значению  $E = -0.61$  (хаотический аттрактор с наибольшим старшим ляпуновским показателем), а рис. 3.33б соответствует значению  $E = -0.12$  (аттрактор у порога исчезновения хаоса). Оба спектра являются непрерывными и представляют собой некий "шумовой" пьедестал с полным отсутствием сколь-нибудь заметных пиков и отсутствием завалов по всей области рассмотренных частот. Такие "равномерные" Фурье-спектры присущи всем аттракторам, существующим в системе при  $E > -1.0$  [122].

Вызывает интерес сравнение полученных результатов со случаем идеализации источника возбуждения колебаний. Как мы уже отмечали ранее, при таком подходе проводится редукция системы уравнений (3.29), после проведения которой исследуется новая система, состоящая из первого, второго, четвертого и пятого уравнений системы (3.29). При этом неизвестная функция  $y_3$  считается постоянным параметром. Было проведено численное интегрирование такой системы уравнений при  $C = -0.5$  и значениях  $y_3$ ,

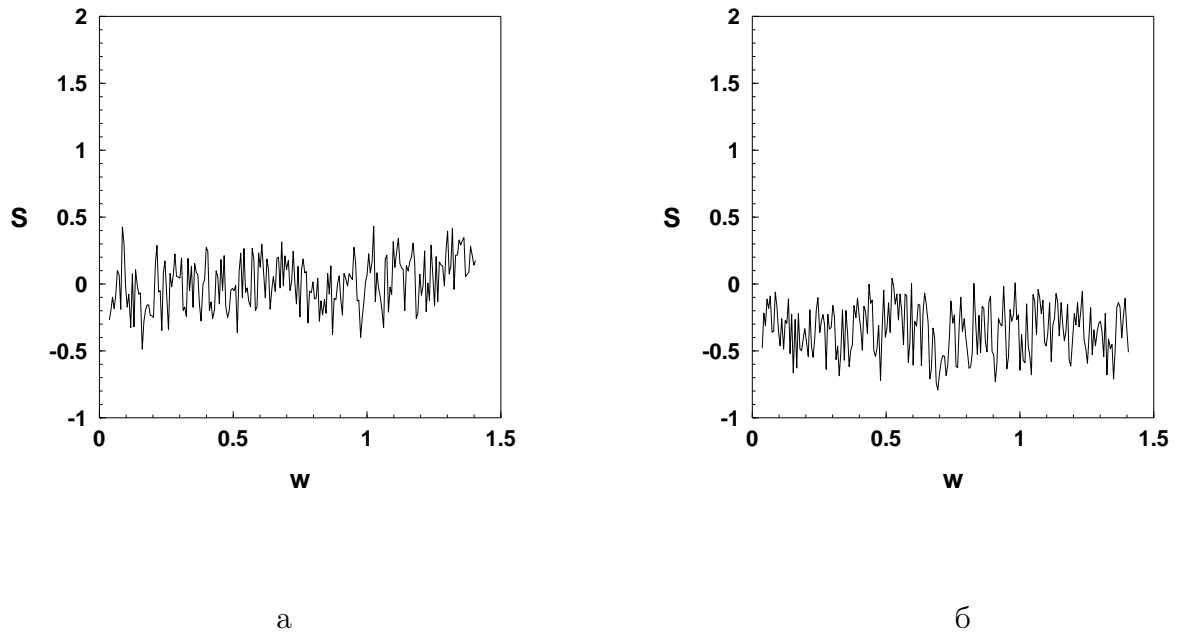


Рис. 3.33: распределение спектральной плотности хаотического аттрактора при  $E = -0.61$  (а) и при  $E = -0.12$  (б) .

изменяющихся в пределах от -250 до 30. Заметим, что это пределы изменения амплитуд колебаний функции  $y_3$  в установившихся хаотических режимах. При численных расчетах значение  $y_3$  изменялось с очень малым шагом. Во всех случаях наблюдается выход системы на устойчивое положение равновесия, причем для  $|y_3| \geq 3$  это положение равновесия всегда имеет вид  $y_1 = y_2 = y_4 = y_5 = 0$ . В данной области изменения параметров не обнаружено не только хаотических аттракторов, но даже и устойчивых предельных циклов [54, 122, 179]. Это в очередной раз свидетельствует, к каким грубым ошибкам в описании динамики системы приводит пренебрежение взаимодействием колебательной нагрузки с источником возбуждения колебаний. Предполагаемые простые устойчивые положения равновесия в действительности оказываются сложнейшими хаотическими аттракторами.

### 3.4 Выводы по главе

В главе 3 был применен новый подход к математическому моделированию маятниковых динамических систем. Основой этого подхода является принципиальное рассмотрение маятниковой системы как системы с ограниченным возбуждением. При таком подходе принимается во внимание взаимодействие между колебательной системой (в данном случае маятником) и источником возбуждения (в данном случае электродвигателем ограниченной мощности). Применение такого подхода позволило получить ряд принципиально новых результатов, сутью которых является установление существования динамического хаоса в данных детерминированных динамических системах.

Для плоского маятника была получена автономная система дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающая нелинейное взаимодействие данного маятника с электродвигателем ограниченной мощности, который возбуждает горизонтальные колебания точки подвеса маятника. Выявлено существование хаотических аттракторов у такой системы дифференциальных уравнений. Подробно проанализировано влияние параметров маятника и электродвигателя на возникновение, развитие и исчезновение детерминированного хаоса. Описаны сценарии перехода от регулярных колебаний к хаотическим и наоборот. Получены фазопараметрические характеристики и спектры ляпуновских характеристических показателей системы. Построены и детально проанализированы фазовые портреты, сечения и отображения Пуанкаре, распределения естественной инвариантной меры и распределения спектральной плотности хаотических аттракторов системы. Построена карта динамических режимов системы. В ряде случаев установлена принципиальная возможность аппроксимации исследуемой системы дифференциальных уравнений одномерными дискретными отображениями.

Для сферического маятника была получена автономная система дифференциальных уравнений пятого порядка, описывающая нелинейное взаимодействие данного маятника с электродвигателем ограниченной мощности,

который возбуждает вертикальные колебания точки подвеса маятника. Установлено существование детерминированного хаоса в данной системе, что ранее считалось невозможным. Обнаружены достаточно большие области в пространстве параметров системы "сферический маятник–электродвигатель", в которых существуют хаотические аттракторы разных типов. Проведено количественное и качественное изучение аттракторов сферического маятника, подобное проведенному для плоского маятника.

## Глава 4

# Влияние факторов запаздывания на динамику маятниковых систем

### 4.1 Введение

Одним из фундаментальных факторов, существенно влияющих на динамику маятниковых систем, являются различные по своей физической природе запаздывания тех или иных воздействий на маятниковую систему. Такие запаздывания воздействий всегда присутствуют в достаточно протяженных системах вследствие ограниченности скорости прохождения сигналов: волн сжатия, растяжения, изгиба, силы тока и т.д. При колебательных процессах запаздывание приводит к изменению сдвига фаз между динамическими характеристиками системы, тем самым качественно меняя их связь (к примеру, влияя на направление воздействий). В некоторых случаях учет запаздывания воздействий приводит только к незначительной количественной коррекции динамических характеристик исследуемых систем. В других случаях учет факторов запаздывания позволяет провести как существенные количественные уточнения параметров существующих установившихся режимов движения, так и обнаружить изменение их качественных характеристик. Например, установить, что неустойчивые движения стали устойчивыми, а устойчивые – неустойчивыми.

Со времен Галилея было хорошо известно, что с течением времени ко-

лебания маятника при отсутствии внешних постоянных воздействий на него, всегда затухают возле его нижнего положения. Говоря современным языком, в этом случае маятник имеет устойчивое по Ляпунову нижнее положение равновесия. В свою очередь, верхнее положения равновесия маятника, при отсутствии внешних воздействий, всегда неустойчиво. Маятник, зафиксированный в верхнем положении равновесия, всегда "сваливается" в нижнее положение, как только убирается фиксирующее устройство.

Одним из самых замечательных открытий в маятниковых системах было открытие возможности динамической стабилизации верхнего, неустойчивого, положения равновесия. Это открытие, трудно объяснимое с точки зрения естественной механической интуиции, имеет очень интересную историю, связанную с именами двух выдающихся ученых Н.Н. Боголюбова и П.Л. Капицы. В 1942 году Н.Н. Боголюбов, используя незадолго до этого строго теоретически обоснованный им метод усреднения, доказал возможность стабилизации верхнего положения равновесия маятника при помощи вертикальных вибраций с высокой частотой и малой амплитудой точки его подвеса. Боголюбов установил, что при выполнении условия

$$\frac{gl}{a^2\omega^2} < \frac{1}{2},$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести,  $l$  – длина маятника,  $a$  и  $\omega$ , соответственно, амплитуда и частота вертикальных вибраций точки подвеса, колебания маятника около верхнего положения равновесия становятся устойчивыми. Однако в связи с военным временем данный поразительный результат Боголюбова был опубликован только в 1950 году [12], поэтому в течении ряда лет он был неизвестен широкому кругу исследователей. Параллельно Боголюбову проблемой динамической стабилизации неустойчивого верхнего положения равновесия заинтересовался П.Л. Капица. После Второй мировой войны он был репрессирован сталинским тоталитарным режимом и фактически помещен под домашний арест у себя на даче в Подмоскowie. Работая на даче, как он в шутку говорил, в "избе-лаборатории", Капица получил аналогичные

Боголюбову результаты по стабилизации неустойчивого верхнего положения равновесия маятника. Эти результаты были опубликованы в 1951 году [32]. Однако следует отметить, что первой публикацией по динамической стабилизации маятника, по видимому, была работа А.Эрдели, опубликованная еще в 1934 году [149]. К сожалению, в свое время эта работа осталась фактически незамеченной и была вновь обнаружена в 1970-ых годах. Впоследствии эффекты динамической стабилизации маятников исследовались Челомеем [100] и нашли широкое применение для вибрационной стабилизации ракет на стартовых площадках.

В 1980 году в работах [70, 71] при помощи метода усреднения и численно-аналитических методов [72, 86, 87] впервые было исследовано влияние запаздывания на периодические движения и динамическую стабилизацию маятника при идеальном возбуждении его точки подвеса. В этих работах было показано, что благодаря запаздыванию, при некоторых условиях, возможно как стабилизировать, так и дестабилизировать положения равновесия маятника. В частности, были определены условия при которых верхнее положение равновесия маятника будет всегда устойчивым, а нижнее – неустойчивым. Исследование влияния запаздывания на колебательно-вращательные движения двойного маятника и на динамическую стабилизацию его положений равновесия было проведено в работах [105, 106].

Следует подчеркнуть, что еще более многообразным и сложным будет влияние запаздывания при рассмотрении задачи о колебаниях маятника в неидеальной постановке, то есть в случае ограниченности мощности источника возбуждения колебаний. Запаздывание сигналов воздействия от источника возбуждения к маятнику (вызванное ограниченностью скорости прохождения импульса через соединительные элементы) может обусловить значительное изменение обратного влияния колебаний маятника на функционирование механизма возбуждения. Как мы увидим в дальнейшем, даже малое по величине, оно способно стабилизировать неустойчивые положения равновесия маятника и, наоборот, дестабилизировать устойчивые.

## 4.2 Влияние запаздывания на стабилизацию маятниковых систем при идеальном возбуждении

### 4.2.1 Высокочастотное возбуждение

Пусть точка подвеса плоского физического маятника, возбуждаемая идеальным источником энергии, движется в вертикальной плоскости по следующему закону:

$$z_1(t) = a \cos \omega t, \quad z_2(t) = b \sin \omega t, \quad (4.1)$$

где  $a, b$  и  $\omega$  – постоянные. При  $a = b$  точка подвеса будет двигаться по окружности, при  $a \neq b$  – по эллипсу (рис. 4.1), при  $a = 0, b \neq 0$  – по вертикали, а при  $a \neq 0, b = 0$  – по горизонтали.

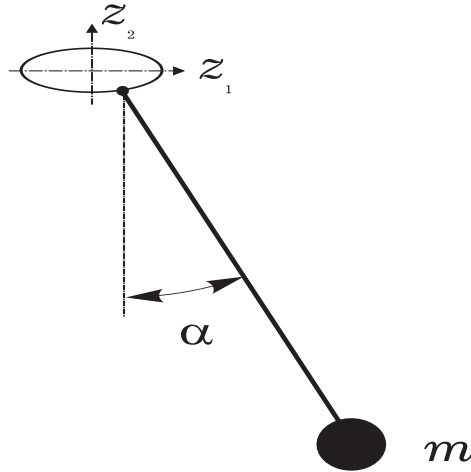


Рис. 4.1: Плоский маятник с вибрирующим подвесом.

В качестве обобщенной координаты  $\alpha$  примем угол отклонения маятника от вертикального направления. Обозначим через  $l$  приведенную длину маятника,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\mu$  – коэффициент сопротивления среды, в которой движется маятник. Предположим, что выполняются следующие соотношения :

$$\frac{a}{l} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{b}{l} = \varepsilon r \ll 1, \quad \mu = \varepsilon \nu, \quad \omega > \frac{\sqrt{gl}}{a}. \quad (4.2)$$

Тогда, следуя [70, 107], уравнение движения с учетом влияния переменного



запаздывания может быть записано в виде :

$$\begin{aligned} & \ddot{\alpha}(\tau) + 2q\varepsilon\dot{\alpha}(\tau) + k^2\varepsilon^2 \sin \alpha[\tau - h(\tau)] - \\ & - \varepsilon \cos(\tau) \cos \alpha[\tau - \gamma(\tau)] - \varepsilon r \sin \tau \sin \alpha[\tau - \gamma(\tau)] = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\tau = \omega t - \text{безразмерное время, } k^2 = \frac{gl}{a^2\omega^2}, \quad q = \frac{\varepsilon\nu k}{2\sqrt{l}}.$$

В уравнении движения (4.3) учитываются следующие факторы запаздывания. Запаздывание импульса источника возбуждения колебаний  $\gamma(t)$ , которое всегда имеет место в достаточно протяженных системах, вследствие ограниченности скорости прохождения сигналов. Запаздывание эффективной восстанавливающей силы  $h(t)$ , наличие которого может быть связано с различными конструктивными особенностями маятника.

Относительно запаздываний предположим, что  $h(\tau)$  и  $\gamma(\tau)$  – непрерывно-дифференцируемые, ограниченные ( $0 \leq h(\tau) \leq R$ ,  $0 \leq \gamma(\tau) \leq R$ ) и периодические с периодом  $2\pi$  функции.

Для исследования уравнения (4.3) применим метод усреднения. Сперва вместо неизвестной функции  $\alpha(\tau)$  введем две новые неизвестные функции  $\varphi(\tau)$  и  $\Omega(\tau)$  по формулам [107]:

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) &= \varphi(\tau) - \varepsilon \cos \tau \cos \varphi(\tau) - \varepsilon r \sin \tau \sin \varphi(\tau), \\ \dot{\alpha} &= \varepsilon \Omega(\tau) + \varepsilon \sin \tau \cos \varphi[\tau - \gamma(\tau)] - \varepsilon r \cos \tau \sin \varphi[\tau - \gamma(\tau)]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

При помощи замены переменных (4.4) уравнение (4.3) преобразуется в систему уравнений в стандартном виде, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 3.3 из [164], обосновывающей применение метода усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на бесконечном интервале времени. Проведя операцию усреднения по методике Хейла, изложенной в работе [164], получим следующую систему уравнений

первого приближения :

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(\tau) &= \varepsilon \Omega(\tau), \\ \dot{\Omega}(\tau) &= \varepsilon [(A\Omega(\tau) - k^2) \sin \varphi(\tau) + B\Omega(\tau) \cos \varphi(\tau) - 2q\Omega(\tau) + \\ &+ (C + G) \sin 2\varphi(\tau) + D \sin^2 \varphi(\tau) + E \cos^2 \varphi(\tau)];\end{aligned}\quad (4.5)$$

здесь

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\dot{\gamma}(\tau) \sin \tau d\tau, & B &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\dot{\gamma}(\tau) \cos \tau d\tau, \\ C &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos \tau \cos[\tau - \gamma(\tau)] d\tau, & D &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \tau \sin[\tau - \gamma(\tau)] d\tau, \\ E &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\sin \tau \cos[\tau - \gamma(\tau)] d\tau, & G &= \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\sin \tau \sin[\tau - \gamma(\tau)] d\tau.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Отметим, что применение методики Хейла позволяет записать систему первого приближения (4.5) как систему уравнений без явно входящего запаздывания аргумента. Однако запаздывание аргумента, которое имело место в исходной системе уравнений (4.3), продолжает оказывать существенное влияние на поведение решений усредненной системы (4.5), так как величины переменных коэффициентов (4.6) усредненной системы, в общем случае, зависят от запаздывания. Хотя, следует заметить, что в нашем случае значения коэффициентов (4.6) зависят только от запаздывания импульса источника возбуждения колебаний маятника  $\gamma(\tau)$  и не зависят от запаздывания эффективной восстанавливающей силы  $h(\tau)$ .

Очевидно, что все положения равновесия системы (4.5) определяются по формулам:

$$\Omega = 0, \quad \varphi = \bar{\varphi}, \quad (4.7)$$

где  $\bar{\varphi}$  – решение уравнения

$$(C + G) \sin 2\varphi + D \sin^2 \varphi + E \cos^2 \varphi - k^2 \sin \varphi = 0. \quad (4.8)$$

Исследуем устойчивость данных положений равновесия. Система уравнений в вариациях для системы (4.5) имеет вид :

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\varphi}{d\tau} &= \varepsilon\delta\Omega, \\ \frac{d\delta\Omega}{d\tau} &= \varepsilon[(A - k^2)\cos\bar{\varphi} - B\sin\bar{\varphi} + 2(C + G)\cos 2\bar{\varphi} + \\ &+ (D - E)\sin 2\bar{\varphi}]\delta\varphi + \varepsilon(A\sin\bar{\varphi} + B\cos\bar{\varphi} - 2q)\delta\varphi. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Применяя к системе уравнений (4.9) критерий Гурвица, устанавливаем, что достаточные условия асимптотической устойчивости положений равновесия системы (4.5) можно записать при помощи неравенств [107]:

$$A\sin\bar{\varphi} + B\cos\bar{\varphi} - 2q < 0, \quad (4.10)$$

$$(A - k^2)\cos\bar{\varphi} - B\sin\bar{\varphi} + 2(C + G)\cos 2\bar{\varphi} + (D - E)\sin 2\bar{\varphi} < 0. \quad (4.11)$$

Как уже было отмечено, значения коэффициентов  $A, B, C, D, E$  и  $G$  существенно зависят от запаздывания  $\gamma(\tau)$ . Поэтому запаздывание  $\gamma(\tau)$  оказывает значительное влияние как на существование положений равновесия, так и на их устойчивость. В пространстве параметров системы уравнений (4.5) возможно выделить значительные области, в которых фактор переменного запаздывания играет роль управляющего воздействия в стабилизации или дестабилизации колебаний маятника. Более того, в некоторых случаях, благодаря наличию запаздывания  $\gamma(\tau)$ , положения равновесия системы (4.5) будут устойчивыми (неустойчивыми) независимо от остальных значений параметров системы (4.5).

В работе [70], где рассматривались только постоянные запаздывания, были локализованы некоторые области, в которых устойчивость или неустойчивость различных положений равновесия маятника определялась значением постоянного запаздывания. Покажем на некоторых примерах, что переменность запаздывания приводит к существенному расширению, в пространстве параметров, областей устойчивости (неустойчивости) положений равновесия маятника.

Пусть точка подвеса движется по вертикали ( $r = 0$ ). Тогда одним из возможных установившихся решений усредненной системы уравнений (4.5) будет решение  $\varphi = 0, \Omega = 0$ , соответствующее нижнему положению равновесия маятника. Как было установлено в [70], если  $k^2 > 0.5$ , то, независимо от значений постоянного запаздывания, данное положение равновесия всегда устойчиво. Если же  $k^2 < 0.5$ , то устойчивость решения  $\varphi = 0, \Omega = 0$  зависит от значений постоянного запаздывания. Предположим, что  $\gamma(\tau) = 2 \cos \tau + \pi$ . Тогда из условий (4.10), (4.11) вытекает, что колебания маятника около нижнего положения равновесия всегда неустойчивы. Если же  $\gamma(\tau) = \sin \tau + \pi$ , то колебания равновесия маятника около нижнего положения равновесия будут устойчивыми для всех допустимых значений  $k$ .

Рассмотрим установившееся решение системы уравнений (4.5)  $\varphi = \pi, \Omega = 0$ , соответствующее верхнему положению равновесия маятника. В работе [70] установлено, что при  $k^2 > 0.5$  данное положение равновесия всегда устойчиво, а при  $k^2 < 0.5$  его устойчивость зависит от значений постоянного запаздывания. Воспользовавшись условиями (4.10), (4.11), нетрудно убедиться, что при  $\gamma(\tau) = 2 \cos \tau + \frac{5\pi}{2}$  колебания маятника около верхнего положения равновесия всегда устойчивы, а при  $\gamma(\tau) = 2 \sin \tau + \frac{5\pi}{2}$  всегда неустойчивы. Причем устойчивость (или неустойчивость) будет иметь место при всех допустимых значениях  $a, l, \omega$  и  $\mu$ .

В заключение этого параграфа отметим, что если запаздывание  $\gamma = \text{const}$ , то условия асимптотической устойчивости (4.10), (4.11) совпадают с условиями, полученными в работе [70].

### 4.2.2 Резонансный случай

В предыдущем параграфе исследовалось влияние запаздывающих воздействий на динамическую устойчивость маятника с вибрирующей точкой подвеса при высокочастотном внешнем возбуждении. Изучим поведение такой системы в случае резонанса и при учете переменных факторов запаздыва-

ния.

Итак, пусть точка подвеса маятника, возбуждаемая идеальным источником энергии, совершает движение по закону (4.1). Примем все обозначения предыдущего параграфа и предположим, что выполняются условия (4.2). Тогда уравнение движения маятника, точка подвеса которого движется по закону (4.1), при учете факторов переменного запаздывания может быть записано в виде [70, 108]:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(t) + \varepsilon\nu\dot{\alpha}[t - \rho(t)] + \omega_0^2 \sin \alpha[t - \varepsilon h(t)] - \\ - \varepsilon\omega^2 \cos \omega t \cos \alpha[t - \gamma(t)] - \varepsilon r\omega^2 \sin \omega t \sin \alpha[t - \gamma(t)] = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  – собственная частота маятника,  $g$  – ускорение силы тяжести.

В уравнении движения (4.12), как и в предыдущем параграфе, учитываются запаздывание импульса источника возбуждения колебаний  $\gamma(t)$  и запаздывание эффективной восстанавливающей силы  $h(t)$ . Кроме того, здесь учтено запаздывание демпфирования  $\rho(t)$ , обусловленное свойствами среды, в которой протекает колебательный процесс. Относительно запаздываний  $\gamma(t)$ ,  $\rho(t)$ ,  $h(t)$  предположим, что они непрерывно-дифференцируемы, периодичны с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ , неотрицательны и ограничены:

$$0 \leq \rho(t) \leq R, \quad 0 \leq h(t) \leq R, \quad 0 \leq \gamma(t) \leq R.$$

Заметим, что уравнение (4.12) записано в размерном времени и, с точностью до принятых обозначений, превращается в уравнение (4.3) при переходе к безразмерному времени.

Рассмотрим малые колебания маятника около нижнего положения равновесия. Разлагая функции  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  в ряды Тейлора, и, удерживая по

два члена ряда, запишем уравнение (4.12) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(t) + \varepsilon \nu \dot{\alpha}[t - \rho(t)] + \omega_0^2 \alpha[t - \varepsilon h(t)] - \frac{\omega_0^2}{6} \alpha^3[t - \varepsilon h(t)] - \varepsilon \omega^2 \cos \omega t + \\ + \frac{\varepsilon \omega^2}{2} \alpha^2[t - \gamma(t)] \cos \omega t - \varepsilon r \omega^2 \alpha[t - \gamma(t)] \sin \omega t + \\ + \frac{\varepsilon r \omega^2}{6} \alpha^3[t - \gamma(t)] \sin \omega t = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Предположим, что угловая скорость вращения точки подвеса  $\omega$  близка к удвоенной собственной частоте колебаний маятника  $\omega_0 \approx \frac{\omega}{2}$ , то есть рассмотрим случай главного параметрического резонанса системы.

Для исследования системы (4.12) применим метод усреднения. Вместо неизвестной функции  $\alpha(t)$  введем новые неизвестные функции  $u(t)$  и  $v(t)$  по формулам [108]:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= u(t) \cos \frac{\omega}{2} t - v(t) \sin \frac{\omega}{2} t - \varepsilon \cos \omega t \\ \dot{\alpha}(t) &= -\frac{\omega}{2} \left[ u(t) \sin \frac{\omega}{2} t + v(t) \cos \frac{\omega}{2} t \right] + \varepsilon \omega \sin \omega t. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Так как рассматривается случай малых резонансных колебаний, будем считать, что величины

$$\frac{\omega}{2} - \frac{2\omega_0^2}{\omega}$$

и

$$\frac{\omega_0^2}{3\omega} \max_{t>0} |u(t) + v(t)|^3$$

являются бесконечно-малыми того же порядка, что и  $\varepsilon$ . Тогда при помощи замены (4.14) уравнение (4.13), после ряда преобразований, приводится к системе уравнений в стандартном виде, которая удовлетворяет условиям теоремы 3.3 из [164], обосновывающей применение метода усреднения на бесконечном интервале времени для систем с переменным запаздыванием. Как и в предыдущем параграфе, проводя усреднение по методике Хейла, получим

следующую систему уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a_1 u + a_2 u^2 + c_1 uv + b_1 v + b_2 v^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega} v(u^2 + v^2) \\ \dot{v} &= a_3 u + a_4 u^2 + c_2 uv + b_3 v + b_4 v^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega} u(u^2 + v^2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\omega \varepsilon}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \left\{ \omega_0^2 h(t) \sin^2 \frac{\omega}{2} t - \nu \sin \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \rho(t) \right] \sin \frac{\omega}{2} t - \right. \\ &\quad \left. - 2r\omega \sin \omega t \sin \frac{\omega}{2} t \cos \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \gamma(t) \right] \right\} dt, \\ a_2 &= \frac{\omega \varepsilon}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \omega \cos \omega t \sin \frac{\omega}{2} t \cos^2 \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \gamma(t) \right] dt, \\ c_1 &= \frac{\omega \varepsilon}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} -2\omega \cos \omega t \sin \frac{\omega}{2} t \cos \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \gamma(t) \right] \sin \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \gamma(t) \right] dt, \\ b_1 &= \frac{\omega \varepsilon}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \left\{ \frac{\omega_0^2}{2} h(t) \sin \omega t - \nu \cos \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \rho(t) \right] \sin \frac{\omega}{2} t + \right. \\ &\quad \left. + 2r\omega \sin \omega t \sin \frac{\omega}{2} t \sin \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \gamma(t) \right] \right\} dt + \frac{\omega}{4} - \frac{\omega_0^2}{\omega}, \\ b_2 &= \frac{\omega \varepsilon}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \omega \cos \omega t \sin \frac{\omega}{2} t \sin^2 \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \gamma(t) \right] dt, \\ a_3 &= \frac{\omega \varepsilon}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \left\{ \frac{\omega_0^2}{2} h(t) \sin \omega t - \nu \sin \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \rho(t) \right] \cos \frac{\omega}{2} t - \right. \\ &\quad \left. - 2r\omega \sin \omega t \cos \frac{\omega}{2} t \cos \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \gamma(t) \right] \right\} dt - \frac{\omega}{4} + \frac{\omega_0^2}{\omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{\omega\varepsilon}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \omega \cos \omega t \cos \frac{\omega}{2} t \cos^2 \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \gamma(t) \right] dt, \\
c_2 &= \frac{\omega\varepsilon}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} -2\omega \cos \omega t \cos \frac{\omega}{2} t \cos \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \gamma(t) \right] \sin \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \gamma(t) \right] dt, \\
b_3 &= \frac{\omega\varepsilon}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \left\{ \omega_0^2 h(t) \cos^2 \frac{\omega}{2} t - \nu \cos \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \rho(t) \right] \cos \frac{\omega}{2} t + \right. \\
&\quad \left. + 2r\omega \sin \omega t \cos \frac{\omega}{2} t \sin \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \gamma(t) \right] \right\} dt, \\
b_4 &= \frac{\omega\varepsilon}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \omega \cos \omega t \cos \frac{\omega}{2} t \sin^2 \left[ \frac{\omega}{2} t - \frac{\omega}{2} \gamma(t) \right] dt.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Приравнивая нулю правые части системы уравнений (4.15), получаем уравнения для определения положений равновесия  $\bar{u}, \bar{v}$ :

$$\begin{aligned}
a_1 \bar{u} + a_2 \bar{u}^2 + c_1 \bar{u} \bar{v} + b_1 \bar{v} + b_2 \bar{v}^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega} \bar{v} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) &= 0 \\
a_3 \bar{u} + a_4 \bar{u}^2 + c_2 \bar{u} \bar{v} + b_3 \bar{v} + b_4 \bar{v}^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega} \bar{u} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Значения величин  $a_1 - a_4, b_1 - b_4, c_1 - c_2$  существенно зависят от запаздываний  $\rho(t), h(t)$  и  $\gamma(t)$ , которые оказывают значительное влияние на существование и устойчивость положений равновесия системы уравнений (4.15). Составляя для системы (4.15) уравнения в вариациях и применяя критерий Гурвица, нетрудно убедиться, что положения равновесия  $\bar{u}, \bar{v}$  будут асимптотически устойчивыми при выполнении неравенств [108]:

$$a_1 + b_3 + 2a_2 \bar{u} + 2b_4 \bar{v} + c_1 \bar{v} + c_2 \bar{u} < 0, \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
&(a_1 + 2a_2 \bar{u} + c_1 \bar{v} + \frac{2\omega_0^2}{\omega} \bar{u} \bar{v})(b_3 + c_2 \bar{u} + 2b_4 \bar{v} - \frac{2\omega_0^2}{\omega} \bar{u} \bar{v}) - \left[ c_1 \bar{u} + \right. \\
&\quad \left. + b_1 + 2b_2 \bar{v} + \frac{\omega_0^2}{\omega} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) + \frac{2\omega_0^2}{\omega} \bar{v}^2 \right] \left[ a_3 + 2a_4 \bar{u} + c_2 \bar{v} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega_0^2}{\omega} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) - \frac{2\omega_0^2}{\omega} \bar{u}^2 \right] < 0,
\end{aligned} \tag{4.19}$$



Для тривиального решения  $\bar{u} = \bar{v} = 0$  условия устойчивости (4.18)–(4.19) значительно упрощаются и могут быть записаны в виде:

$$a_1 + b_3 < 0, \quad (4.20)$$

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 < 0. \quad (4.21)$$

Наиболее наглядно влияние запаздываний на установившиеся колебания маятника можно показать в том случае, когда  $\rho(t)$ ,  $h(t)$  и  $\gamma(t)$  – постоянные величины. Действительно, пусть  $\rho(t) = \rho = \text{const}$ ,  $h(t) = h = \text{const}$ ,  $\gamma(t) = \gamma = \text{const}$ .

Воспользовавшись формулами (4.16), получим следующие значения величин  $a_1 - a_4$ ,  $b_1 - b_4$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  в усредненной системе уравнений (4.15)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\varepsilon}{2} \left( \omega_0^2 h - \nu \cos \frac{\omega}{2} \rho - r \omega \cos \frac{\omega}{2} \gamma \right), \\ b_1 &= \frac{\omega}{4} - \frac{\omega_0^2}{\omega} - \frac{\varepsilon}{2} \left( \nu \sin \frac{\omega}{2} \rho + r \omega \sin \frac{\omega}{2} \gamma \right), \\ a_3 &= \frac{\omega_0^2}{\omega} - \frac{\omega}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \left( \nu \sin \frac{\omega}{2} \rho - r \omega \sin \frac{\omega}{2} \gamma \right), \\ b_3 &= \frac{\varepsilon}{2} \left( \omega_0^2 h - \nu \cos \frac{\omega}{2} \rho + r \omega \cos \frac{\omega}{2} \gamma \right), \\ a_2 &= b_2 = c_1 = c_2 = a_4 = b_4 = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Следовательно, в случае постоянных запаздываний, положения равновесия системы (4.15) определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 \bar{u} + b_1 \bar{v} + \frac{\omega_0^2}{\omega} \bar{v} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) &= 0, \\ a_3 \bar{u} + b_3 \bar{v} - \frac{\omega_0^2}{\omega} \bar{u} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) &= 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где значения величин  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $b_1$  и  $b_3$  определяются по формулам (4.22).

Независимо от значений запаздывания система уравнений (4.23) имеет тривиальное решение  $\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = 0$ . Кроме тривиального система (4.23) допус-

кает нетривиальные решения:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= \sqrt{-\frac{2\omega a_1^2(s_1 + s_2 + 2b_1)}{\omega_0^2[(s_1 + s_2)^2 + 4a_1^2]}}, & \bar{u}_1 &= \frac{\bar{v}_1}{2a_1}(s_1 + s_2), \\ \bar{v}_2 &= -\bar{v}_1 & \bar{u}_2 &= -\bar{u}_1,\end{aligned}\tag{4.24}$$

где  $s_1 = -a_3 - b_1$ ,  $s_2 = \sqrt{(a_3 + b_1)^2 - 4a_1b_3}$ . При этом решения (4.24) существуют при выполнении условий:

$$\begin{aligned}r^2\omega^2 - \left(\omega_0^2 h - \nu \cos \frac{\omega}{2}\rho\right)^2 &\geq 0 \\ \frac{\omega}{2} - \frac{2\omega_0^2}{\omega} - \varepsilon\nu \sin \frac{\omega}{2}\rho + \varepsilon\sqrt{r^2\omega^2 - \left(\omega_0^2 h - \nu \cos \frac{\omega}{2}\rho\right)^2} &\leq 0.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Система уравнений (4.23) также имеет решения:

$$\begin{aligned}\bar{v}_3 &= \sqrt{\frac{2\omega a_1^2(s_2 - s_1 - 2b_1)}{\omega_0^2[(s_1 - s_2)^2 + 4a_1^2]}}, & \bar{u}_3 &= \frac{\bar{v}_3}{2a_1}(s_1 - s_2), \\ \bar{v}_4 &= -\bar{v}_3, & \bar{u}_4 &= -\bar{u}_3,\end{aligned}\tag{4.26}$$

которые существуют при выполнении условий:

$$\begin{aligned}r^2\omega^2 - \left(\omega_0^2 h - \nu \cos \frac{\omega}{2}\rho\right)^2 &\geq 0, \\ \frac{\omega}{2} - \frac{2\omega_0^2}{\omega} - \varepsilon\nu \sin \frac{\omega}{2}\rho - \varepsilon\sqrt{r^2\omega^2 - \left(\omega_0^2 h - \nu \cos \frac{\omega}{2}\rho\right)^2} &\leq 0.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Непосредственно из формул (4.24), (4.26) вытекает, что запаздывания  $\rho$ ,  $h$  и  $\gamma$  могут значительно изменить величины положений равновесия. Также следует отметить, что условия существования решений (4.24), (4.26), а именно, условия (4.25), (4.27) не зависят от запаздывания импульса источника возбуждения колебаний  $\gamma$ .

Подставив значения  $a_1, b_3, a_3, b_1$  из (4.22) в (4.20) и (4.21), получим условия асимптотической устойчивости тривиального решения в виде:

$$\omega_0^2 h - \nu \cos \frac{\omega}{2}\rho < 0,\tag{4.28}$$

$$\varepsilon^2 \left[ \left( \omega_0^2 h - \nu \cos \frac{\omega}{2} \rho \right)^2 - r^2 \omega^2 \right] + \left( \frac{\omega}{2} - \frac{2\omega_0^2}{\omega} - \varepsilon \nu \sin \frac{\omega}{2} \rho \right)^2 > 0. \quad (4.29)$$

В свою очередь, нетривиальные решения (4.24), (4.26) будут асимптотически устойчивыми при выполнении условий (4.18), (4.19). Так как при постоянных запаздываниях  $a_2 = b_2 = c_1 = c_2 = a_4 = b_4 = 0$ , то для всех решений (4.24), (4.26) условие устойчивости (4.18) совпадает с условием (4.28).

Из полученных условий устойчивости следует, что запаздывание эффективной восстанавливающей силы дестабилизирует установившиеся режимы колебаний маятника. Так, если

$$h > \frac{\nu}{\omega_0^2} \cos \frac{\omega}{2} \rho,$$

все положения равновесия системы уравнений (4.15) будут неустойчивыми. Кроме того, такие решения всегда неустойчивы, если запаздывание демпфирования  $\rho$  удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{\omega} + \frac{4n\pi}{\omega} < \rho < \frac{3\pi}{\omega} + \frac{4n\pi}{\omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В заключение отметим, что условия устойчивости тривиального решения (4.28), (4.29) не зависят от запаздывания импульса источника возбуждения  $\delta$ , в то время как в нерезонансном случае это запаздывание оказывает определяющее влияние на устойчивость положений равновесия маятника.

## 4.3 Высокочастотная стабилизация маятниковых систем при неидеальном возбуждении

### 4.3.1 Горизонтальное возбуждение точки подвеса

Теперь рассмотрим задачу о динамической стабилизации колебаний плоского маятника с учетом ограниченности мощности источника возбуждения. Пусть эксцентриковый возбудитель через ползун соединен с подвесом П маятника (рис. 4.2). Когда эксцентрик  $a$  поворачивается на угол  $\theta$ , подвес получает перемещение по горизонтальной плоскости  $u(t) = a \cos \theta(t - p)$ ; постоянный положительный параметр  $p$  отражает запаздывание сигнала при

прохождении через шатун и шарниры. Если при этом маятник отклонится от вертикали на угол  $\alpha$ , то горизонтальная составляющая сил, приложенных к подвесу и обусловленных движением маятника, может быть записана в виде [44, 46, 84]  $ml(\dot{\alpha}(t))^2 \sin \alpha(t) - ml\ddot{\alpha}(t) \cos \alpha(t)$  ( $m$  — масса маятника,  $l$  — его длина). Она создает на валу двигателя противодействующий момент  $aml\{[\dot{\alpha}(t-h)]^2 \sin \alpha(t-h) - \ddot{\alpha}(t-h) \cos \alpha(t-h) \sin \theta(t)\}$ , причем  $h$  характеризует время запаздывания воздействия положения маятника при прохождении от его центра инерции через подвес к эксцентрику. Очевидно, что  $h > p$ . Считаем, что вертикальная составляющая сил в подвесе уравновешивается силами реакции при его закреплении, что позволяет ему перемещаться только горизонтально. При его движении будем учитывать вязкое трение  $\beta\dot{u}(t)$ , где  $\beta$  — коэффициент вязкого трения.

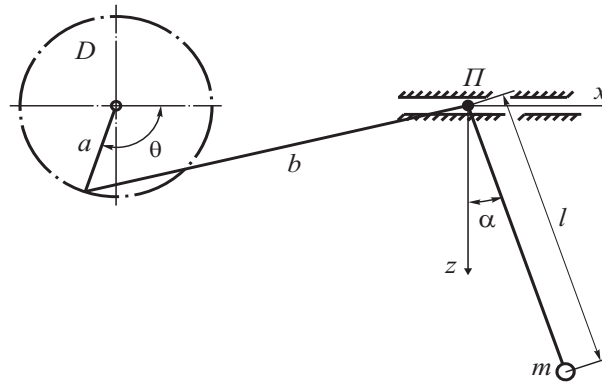


Рис. 4.2: Горизонтальное возбуждение точки подвеса

Следовательно, вращение вала двигателя при учете момента силы трения  $\beta a \dot{u}(t - p) \sin \theta(t)$  описывается следующим уравнением [44, 46]:

$$I\ddot{\theta}(t) = L[\dot{\theta}(t)] - H[\dot{\theta}(t)] - mla\{[\dot{\alpha}(t-h)]^2 \sin \alpha(t-h) - \ddot{\alpha}(t-h) \cos \alpha(t-h)\} \sin \theta(t) - \beta a^2 \dot{\theta}(t-2p) \sin \theta(t-2p) \sin \theta(t). \quad (4.30)$$

Здесь  $L[\dot{\theta}(t)]$  — движущий момент;  $H[\dot{\theta}(t)]$  — внутренний момент сил сопротивления вращению ротора двигателя [174];  $I$  — момент инерции.

При горизонтальных колебаниях подвеса движение маятника с учетом запаздывания его реакции на перемещения подвеса, равного  $\gamma$ , будет описы-

ваться уравнением вида [12, 44, 46, 70]

$$\ddot{\alpha}(t) + \lambda \dot{\alpha}(t) + \frac{g}{l} \sin \alpha(t) - \frac{a}{l} \{ [\dot{\theta}(t-h)^2 \cos \theta(t-h) - \ddot{\theta}(t-h) \sin \theta(t-h)] \cos \alpha(t) = 0, \quad (4.31)$$

где  $\lambda$  — коэффициент вязкого сопротивления среды, в которой движется маятник;  $g$  — ускорение свободного падения;  $h = p + \gamma$ .

Система нелинейных уравнений (4.30) – (4.31) отражает процесс взаимодействия вращения вала электродвигателя ограниченной мощности и колебаний маятника с вибрирующим по горизонтальной плоскости подвесом. Относительно физических параметров этого процесса введем следующие предположения. Пусть эксцентриситет возбудителя  $a$  намного меньше  $l$ , а скорость вращения вала  $\dot{\theta}$  значительно превышает собственную частоту маятника  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Другими словами, реализуются необходимые условия для проявления эффекта высокочастотной стабилизации маятника, когда

$$\dot{\theta} > \omega_0 \frac{l}{a}; \quad \frac{a}{l} = \varepsilon \ll 1. \quad (4.32)$$

Здесь  $\varepsilon$  — малый положительный параметр.

Предположим, что момент трения в подвесе и сила трения пропорциональны малому параметру. Введем замену переменных

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t) \quad (4.33)$$

и, кроме того, перейдем к быстрому времени  $\tau = ct$ , где  $c$  — скорость вращения вала возбудителя без нагрузки. Считаем, что обратное влияние маятника на возбудитель таково, что  $\frac{\omega}{c} = 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  достаточно мало. Так как в дальнейшем будут исследоваться режимы движения, близкие к стационарным, в качестве  $L(\omega)$  используем статическую характеристику возбудителя, когда

$$\frac{L(\omega) - H(\omega)}{Ic} = \varepsilon M(\omega). \quad (4.34)$$

Тогда вместо системы уравнений (4.30) – (4.31) получим эквивалентную ей

систему

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega(\tau)}{d\tau} = & \varepsilon M[\omega(\tau)] - \frac{p_1\omega_1}{k} \left\{ \left[ \frac{d\alpha(\tau - \Delta)}{d\tau} \right]^2 \sin \alpha(\tau - \Delta) + \right. \\
& + \left[ \varepsilon\mu \frac{d\alpha(\tau - \Delta)}{d\tau} + \varepsilon^2 k^2 \sin \alpha(\tau - \Delta) \right] \cos \alpha(\tau - \Delta) - \varepsilon \left[ \frac{\omega^2(\tau - 2\Delta)}{c^2} \times \right. \\
& \times \cos \theta(\tau - 2\Delta) - \frac{\varepsilon k}{\omega_0} \cdot \frac{d\omega(\tau - 2\Delta)}{d\tau} \sin \theta(\tau - 2\Delta) \left. \right] \times \\
& \times \cos^2 \alpha(\tau - \Delta) \left. \right\} \sin \theta(\tau) - \varepsilon p_2 \frac{\omega(\tau - 2q)}{c} \sin \theta(\tau - 2q) \sin \theta(\tau);
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha(\tau)}{d\tau^2} + \varepsilon\mu \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} + \varepsilon^2 k^2 \sin \alpha(\tau) - \varepsilon \left[ \frac{\omega^2(\tau - \Delta)}{c^2} \cos \theta(\tau - \Delta) - \right. \\
\left. - \frac{\varepsilon k}{\omega_0} \cdot \frac{d\omega(\tau - \Delta)}{d\tau} \sin \theta(\tau - \Delta) \right] \cos \alpha(\tau) = 0; \\
\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{c}.
\end{aligned}$$

В системе уравнений (4.35) введены следующие обозначения:

$$\varepsilon p_1 = \frac{ma l}{I}; \quad \varepsilon p_2 = \frac{\beta a^2}{I}; \quad \varepsilon\mu = \frac{\lambda}{c}; \quad k^2 = \frac{gl}{a^2 c^3}; \quad \Delta = ch; \quad q = cp. \tag{4.36}$$

Для исследования (4.35) применим метод усреднения. Посредством замены переменных [44, 46]

$$\begin{aligned}
\alpha(\tau) &= x(\tau) - \varepsilon \cos \theta \cos x(\tau); \\
\frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} &= \varepsilon y(\tau) + \varepsilon \frac{\omega(\tau - \Delta)}{c} \sin \theta(\tau - \Delta) \cos x(\tau),
\end{aligned} \tag{4.37}$$

которая является модификацией замены переменных, предложенных в работе [12], система уравнений (4.35) преобразуется к виду [44, 46]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{d\tau} = & \varepsilon \left[ M[\omega(\tau)] + \frac{p_1\omega_0}{k} \cdot \frac{\omega^2(\tau - 2\Delta)}{c^2} \cos^2 x(\tau - \Delta) \cos \theta(\tau - \right. \\
& \left. - 2\Delta) \sin \theta(\tau) - p_2 \frac{\omega(\tau - 2q)}{c} \sin \theta(\tau - 2q) \sin \theta(\tau) \right] + \varepsilon^2 \dots; \\
\frac{dx(\tau)}{d\tau_1} = & \varepsilon \left\{ y(\tau) + \cos x(\tau) \left[ \frac{\omega(\tau - \Delta)}{c} \sin \theta(\tau - \Delta) - \frac{\omega(\tau)}{c} \sin \theta(\tau) \right] \right\} + \varepsilon^2 \dots;
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy(\tau)}{d\tau} = & \varepsilon \left\{ y(\tau) + \cos x(\tau) \left[ \frac{\omega(\tau - \Delta)}{c} \sin \theta(\tau - \Delta) - \frac{\omega(\tau)}{c} \sin \theta(\tau) \right] \right\} \times \\
& \times \sin \theta(\tau - \Delta) \frac{\omega(\tau - \Delta)}{c} \sin x(\tau) - \varepsilon \left[ \mu y(\tau) + \mu \cos x(\tau) \frac{\omega(\tau - \Delta)}{c} \times \right. \\
& \times \sin \theta(\tau - \Delta) + k^2 \sin x(\tau) - \\
& \left. - \frac{\omega^2(\tau - \Delta)}{c^2} \cos \theta(\tau - \Delta) \cos \theta(\tau) \sin x(\tau) \cos x(\tau) \right] + \varepsilon^2 \dots
\end{aligned}$$

Как уже было отмечено, целью исследования являются установившиеся режимы взаимодействия. Поэтому, учитывая структуру системы уравнений (4.38), функцию в первом приближении можно представить так [174]:

$$\theta(\tau) = \frac{\omega(\tau)}{c} \tau + \varepsilon \Phi(\tau), \quad (4.39)$$

где  $\Phi(\tau)$  — некоторая периодическая функция.

Используя (4.39), получаем систему уравнений, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 3.3 [164], обосновывающей применение метода усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на бесконечном интервале времени. Проведя операцию усреднения по явно входящему времени по методике, изложенной в работе [164], приходим к следующей системе уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \varepsilon \left[ M(\omega) + \frac{p_1 \omega_0 \omega^2}{2kc^2} \sin \frac{2\omega\Delta}{c} \cos^2 x - \frac{p_2 \omega}{2c} \cos \frac{2\omega q}{c} \right]; \\
\frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon y; \\
\frac{dy}{d\tau} &= \varepsilon \left( -\mu y - k^2 \sin x + \frac{\omega^2}{4c^2} \cos \frac{\omega\Delta}{c} \sin 2x \right).
\end{aligned} \quad (4.40)$$

Отметим, что теорема 3.3 [164] дает возможность проводить процедуру усреднения без каких-либо ограничений на порядок запаздываний.

Определим стационарные решения  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{x}$  системы (4.40). Можно убедиться, что  $\bar{y} = 0$ , а  $\bar{\omega}$  и  $\bar{x}$  определяются из уравнений

$$M(\bar{\omega}) + \frac{p_1 \omega_0 \bar{\omega}^2}{2kc^2} \sin \frac{2\bar{\omega}\Delta}{c} \cos^2 \bar{x} - \frac{p_2 \bar{\omega}}{2\bar{x}} \cos \frac{2\bar{\omega}q}{c} = 0; \quad (4.41)$$

$$\sin \bar{x} \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}^2}{2c^2} \cos \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} \cos \bar{x} \right) = 0.$$

Как видно из (4.41), запаздывание импульсов сил от источника к маятнику  $k = \frac{\Delta}{c}$  и от источника к подвесу  $p = \frac{q}{c}$  существенно влияет на значения скорости вращения вала возбудителя  $\bar{\omega}$  и величину угла отклонения маятника  $\bar{x}$ . Известно, что силы трения в колебательных системах с ограниченным возбуждением при стационарных режимах взаимодействия создают моменты сопротивления вращательному движению вала, которые способствуют уменьшению скорости вращения [98, 174]. При отсутствии запаздывания,  $q = 0$ , именно таково влияние сил вязкого трения в подвесе, но усредненный момент этих сил может быть как противодействующим  $\left( \cos \frac{2\bar{\omega}q}{c} > 0 \right)$ , так и способствующим увеличению скорости вращения  $\cos \frac{2\bar{\omega}q}{c} < 0$ , когда сила вязкого трения играет роль «отрицательного» трения. Член  $\varepsilon I c \frac{p_1 \omega_0}{2k} \cdot \frac{\bar{\omega}^2}{c^2} \cos^2 \bar{x}$  выражает собой усредненный момент, необходимый на поддержание маятника в районе угла  $\bar{x}$ , так как согласно [164] маятник совершает малые колебания около положения  $\bar{x}$ . При отсутствии запаздывания этот момент равен нулю. При наличии запаздывания он может быть моментом сопротивления  $\left( \text{например, при } \frac{\pi}{2} < \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} < \pi \right)$  и положительным моментом, приводящим к увеличению  $\bar{\omega}$ . Последнее физически возможно, так как силы трения в маятнике полагались пренебрежимо малыми  $\frac{\lambda}{c} = \varepsilon \mu$  и, кроме того, при стационарных режимах не учитывается энергия источника, которая пошла на «раскрутку» системы [83].

Система трансцендентных уравнений (4.41) допускает бесконечное множество решений. Выделим из этого множества некоторые возможные классы решений. Например, (4.41) имеет решение вида

$$\bar{x} = n\pi; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.42)$$

а  $\bar{\omega}$  определяются из уравнения

$$M(\bar{\omega}) + \frac{p_1 \omega_0 \bar{\omega}^2}{2k c^2} + \sin \frac{2\bar{\omega}\Delta}{c} - \frac{p_2 \bar{\omega}}{2c} \cos \frac{2\bar{\omega}q}{c} = 0. \quad (4.43)$$



Этому классу решений соответствуют колебания маятника около нижнего ( $n$  — четное) или верхнего ( $n$  — нечетное) положений.

Кроме того, система уравнений (4.41) имеет решения следующего типа:

$$\bar{x} = \pm \arccos \frac{2k^2 c^2}{\bar{\omega}^2 \cos \frac{\bar{\omega} \Delta}{c}} + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.44)$$

где  $\bar{\omega}$  — решение уравнения

$$M(\bar{\omega}) + \frac{4p_1\omega_0 k^3 c^2}{\bar{\omega}^2} \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega} \Delta}{c} - \frac{p_2 \bar{\omega}}{2c} \cos \frac{2\bar{\omega} q}{c} = 0. \quad (4.45)$$

Исследуем устойчивость полученных стационарных решений. Система уравнений в вариациях, построенная для системы (4.40), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\omega}{d\tau} &= \varepsilon(A\delta\omega + F\delta x); \\ \frac{d\delta x}{dt} &= \varepsilon\delta y; \\ \frac{d\delta y}{d\tau} &= \varepsilon(B\delta\omega + D\delta x + E\delta y). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial M(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\bar{\omega}} + \frac{p_1\omega_0\bar{\omega}}{kc^2} \sin \frac{2\bar{\omega}\Delta}{c} \cos^2 \bar{x} + \frac{p_1\omega_0\bar{\omega}^2\Delta}{c^3} \cos \times \\ &\times \frac{2\bar{\omega}\Delta}{c} \cos^2 \bar{x} - \frac{p_2}{2c} \cos \frac{2\bar{\omega}q}{c} + \frac{p_2\bar{\omega}q}{c^2} \sin \frac{2\bar{\omega}q}{c}; \\ F &= -\frac{p_1\omega_0\bar{\omega}^2}{kc^2} \sin \frac{2\bar{\omega}\Delta}{c} \cos \bar{x} \sin \bar{x}; \quad E = -\mu; \quad B = \frac{\bar{\omega}}{2c} \cos \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} \times \\ &\times \sin 2\bar{x} - \frac{\bar{\omega}^2\Delta}{4c^3} \sin \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} \sin 2\bar{x}; \quad D = \frac{\bar{\omega}^2}{2c^2} \cos \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} \cos 2\bar{x} - k^2 \cos \bar{x}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Из анализа полученной системы в вариациях (4.46) устанавливаем, что достаточные условия асимптотической устойчивости стационарных решений системы уравнений (4.40) можно записать при помощи неравенств [44, 46]:

$$A + E < 0; \quad DA - FB > 0; \quad FB + ED > AE(A + E). \quad (4.48)$$

Для решений (4.42) – (4.43) условия устойчивости можно значительно упростить. В этом случае  $B = F = 0$ , поэтому (4.48) эквивалентны выполнению

соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\bar{\omega}} + \frac{p_1 \omega_0 \bar{\omega}}{k c^2} \left( \sin \frac{2\bar{\omega} \Delta}{c} + \frac{\bar{\omega} \Delta}{c} \cos \frac{2\bar{\omega} \Delta}{c} \right) - \\ - \frac{p_2}{c} \left( \frac{1}{2} \cos \frac{2\bar{\omega} q}{c} - \frac{\bar{\omega}}{c} q \sin \frac{2\bar{\omega} q}{c} \right) < 0; \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\cos \frac{\bar{\omega} \Delta}{c} < (-1)^n \frac{2gl}{a^2 \bar{\omega}^2}. \quad (4.50)$$

Если  $\frac{gl}{a^2 \bar{\omega}^2} > \frac{1}{2}$ , то, независимо от значений запаздывания  $\Delta$ , условие (4.50) выполняется при  $n$  — четном и не выполняется при  $n$  — нечетном. В том случае, когда  $\frac{gl}{a^2 \bar{\omega}^2} < \frac{1}{2}$ , справедливость неравенства (4.50) существенно зависит от значений  $\Delta$ . Заметим, что если  $\bar{\omega}$  — заданная постоянная, то условие (4.50) совпадает с полученным в работе [70] условием устойчивости маятника при возбуждении его идеальным источником энергии.

Обозначим через  $S(\omega)$  следующее выражение:

$$S(\omega) = \frac{p_1 \omega_0 \omega^2}{2k c^2} \sin \frac{2\omega \Delta}{c} - \frac{p_2 \omega}{2c} \cos \frac{2\omega q}{c}.$$

Так как для реальных источников возбуждения  $\frac{\partial M}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\bar{\omega}} < 0$ , то условие (4.49) всегда имеет место, например, при

$$\frac{3\pi}{4} < \frac{\bar{\omega} q}{c} < \pi; \quad \frac{3\pi}{2} < \frac{\bar{\omega} \Delta}{c} < \frac{9\pi}{4}. \quad (4.51)$$

В этом случае функция  $S(\bar{\omega})$  будет отрицательной и  $\bar{\omega} < c$ . Однако соотношения (4.49) и (4.50) могут быть справедливы не только при выполнении неравенств (4.51) (особенно при крутой характеристике двигателя [174]), но и при положительности слагаемых  $S(\bar{\omega})$ , что способствует увеличению скорости вращения вала.

Проиллюстрируем сказанное конкретным примером, когда система имеет следующие параметры:

$$L(\omega) = (83,4 - 0,083\omega)H \cdot \text{м}; \quad H(\omega) = 1,666 \cdot 10^{-3} \omega H \cdot \text{м};$$

$$I = 0,033 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad m = 0,033 \text{ кг}; \quad \beta = 1,86 \text{ кг} \cdot \text{сек}^{-1}; \quad a = 0,02 \text{ м};$$

$$l = 2 \text{ м}; \quad c = 980,4 \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Среди допустимых решений (4.44) рассмотрим решение  $\bar{x} = \pi$ . Ему соответствуют малые периодические колебания маятника около верхнего вертикального положения [164]. При отсутствии запаздывания в системе такие колебания всегда неустойчивы как при идеальном, так и неидеальном источнике возбуждения. Однако наличие запаздывания позволяет стабилизировать маятник в верхнем положении. Проследим влияние запаздываний на изменение скорости вращения  $\bar{\omega}$  и устойчивость стационарного режима  $\bar{\omega}$ ;  $\bar{x} = \pi$ ;  $\bar{y} = 0$ . На рис. 4.3а изображены графики функций  $M(\omega)$  (прямая  $RQ$ ) и (кривые 1, 2, 3) для рассматриваемого случая. Кривой 1 соответствуют запаздывания  $h = 0,0083$ ;  $p = 0,002$  и  $\bar{\omega}$  отвечает точка  $P$ , в которой режим является устойчивым (условия (4.49), (4.50) выполняются). Для  $h = 0,035$  и  $p = 0,003$  уравнение (4.43) имеет два корня, а функция  $S(\omega)$  — вид кривой 2, но режим, параметры которого характеризует точка  $Q$ , будет неустойчив, так как не выполняется условие (4.49). При дальнейшем увеличении запаздываний ( $h = 0,075$ ;  $p = 0,025$ )  $S(\omega)$  получает вид кривой 3, когда существует уже три корня уравнения (4.43) (в рассматриваемом диапазоне  $\frac{\bar{\omega}}{c} = 1 + \varepsilon$ ). При этом верхнее положение маятника устойчиво при значениях  $\bar{\omega}$  в точках  $N$  и  $G$ , причем в  $G$ ,  $\bar{\omega} > c$ . Следовательно, если переходной процесс при подходе к установившемуся режиму характеризуется значениями  $\omega$ , которые меньше  $c$ , то система стабилизируется на частоте  $\bar{\omega}$ , отвечающей точке  $N$ . Если же переходной процесс имеет интервалы со сменяющимися друг друга ускорением и торможением вращения вала двигателя, то возможен второй режим (точка  $G$ ), если система к нему приближается при  $\omega > c$ . И наконец, если предположить наличие в системе большого запаздывания (что присуще крупногабаритным протяженным механизмам)  $h = 0,2$ ;  $p = 0,09$ , то количество возможных установившихся режимов ощутимо увеличивается. На рис. 4.3б показано 11 точек пересечения  $M(\omega)$  и  $S(\omega)$ , однако только 1, 5 и 11 точкам (на рисунке выделены кружочками) отвечают устойчивые режимы.

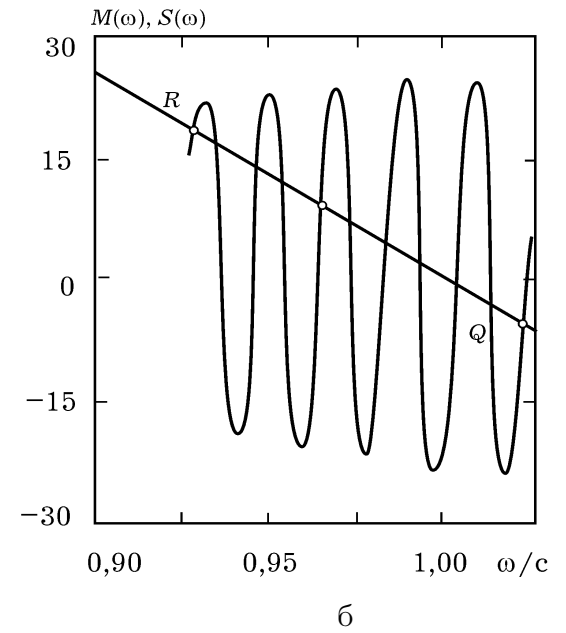
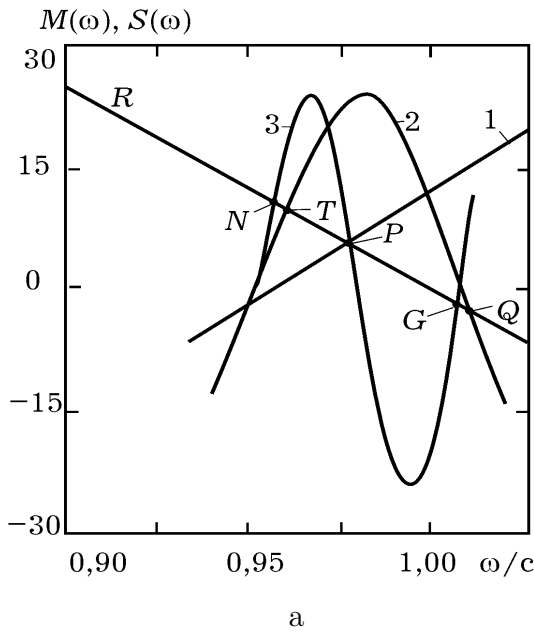


Рис. 4.3: Влияние запаздываний на существование и устойчивость стационарных решений.

Видно, что в четных точках пересечения не выполняется условие (4.49) (то есть маятник с идеальным возбуждением мог быть устойчив), а в остальных — условие (4.50) (источник работает с  $A < 0$ , но маятник неустойчив).

### 4.3.2 Вертикальное возбуждение точки подвеса

Рассмотрим высокочастотную стабилизацию маятника неидеальным источником энергии при наличии запаздывания прямого и обратного воздействий. Пусть эксцентриковый возбудитель через ползун вызывает вертикальные колебания подвеса  $\Pi$  маятника (рис. 4.4). При повороте эксцентрика  $a$  на угол  $\Theta$  подвес получает перемещение  $v(t) = a \sin \Theta(t - p)$ . Постоянный положительный параметр введен для учета запаздывания реакции при прохождении сигнала воздействия через ползун и шарниры связи. Если маятник отклонился на угол  $\alpha$ , то вертикальная составляющая сил, приложенных к подвесу, равна  $mg + ml\dot{\alpha}^2(t) \cos \alpha(t) + ml\ddot{\alpha}(t) \sin \alpha(t)$  [45, 84], что создает на валу двигателя момент  $am[g + l\dot{\alpha}^2(t - h) \cos \alpha(t - h) + \ddot{\alpha}(t - h) \sin \alpha(t - h)]$ , где  $m$  — масса маятника,  $g$  — ускорение свободного падения,  $l$  — длина маятника,  $h$  — запаздывание влияния положения маятника на вращение вала.

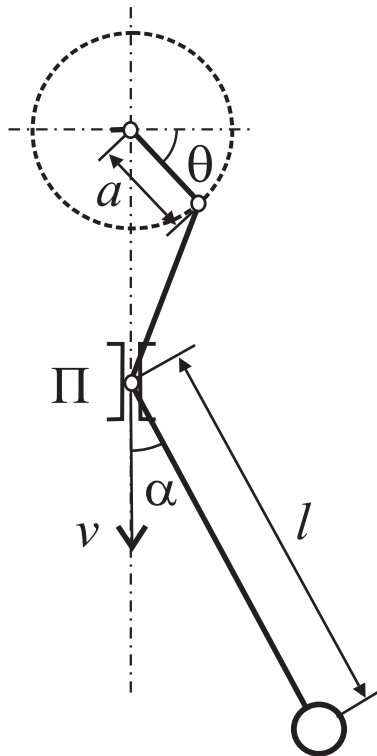


Рис. 4.4: Вертикальное возбуждение точки подвеса.

Вертикальным перемещениям подвеса противодействует сила вязкого трения  $\beta\dot{v}(t)$ , где  $\beta$  — коэффициент вязкого трения. Тогда вращение вала двигателя с учетом противодействующего момента силы трения  $\beta a\dot{v}(t - p) \cos \Theta(t)$  подчинено уравнению вида [45]:

$$I\ddot{\Theta}(t) = L[\dot{\Theta}(t)] - H[\dot{\Theta}(t)] - am[g + l\dot{\alpha}^2(t - h) \cos(t - h) + \\ + \ddot{\alpha}(t - h) \sin \alpha(t - h)] \cos \Theta(t) - \beta a \dot{\Theta}(t - 2p) \cos \Theta(t - 2p) \cos \Theta(t), \quad (4.52)$$

где  $L[\dot{\Theta}(t)]$  — движущий момент;  $H[\dot{\Theta}(t)]$  — внутренний момент сил сопротивления вращению ротора:  $I$  — момент инерции ротора [174].

При вертикальной вибрации подвеса колебания маятника с учетом запаздывания его реакции на перемещения подвеса, равного  $n_1$  ( $h = p + n_1$ ), будут описываться уравнением [12, 45, 70]

$$\ddot{\alpha}(t) + \lambda\dot{\alpha}(t) + \frac{g}{l} \sin \alpha(t) - \frac{a}{l} [\dot{\Theta}^2(t - h) \sin \Theta(t - h) + \\ + \ddot{\Theta}(t - h) \cos \Theta(t - h)] \sin \alpha(t) = 0, \quad (4.53)$$

где  $\lambda$  — коэффициент вязкого сопротивления среды.

Система связанных нелинейных уравнений (4.52), (4.53) свидетельствует о сложном процессе взаимодействия вращения вала двигателя и колебаний маятника при вертикальной вибрации подвеса. Рассмотрим возможность динамической стабилизации маятника около некоторых углов отклонения от вертикали, когда потребление энергии маятником может существенно корректировать режим вращения вала двигателя. При этом налагаем следующие ограничения на параметры системы. Пусть эксцентриситет  $a$  намного меньше  $l$ , а скорость вращения вала  $\dot{\Theta}$  значительно превосходит собственную частоту маятника  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , т.е. реализуются условия, необходимые для высокочастотной стабилизации маятника, когда  $\dot{\Theta} > \frac{\omega_0 l}{a}$ ,  $\frac{a}{l} = \varepsilon \ll 1$ , где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр.

Введем замену переменных  $\dot{\Theta}(t) = \omega(t)$  и перейдем в системе (4.52), (4.53) к быстрому времени  $\tau = ct$ , где  $c$  — скорость вращения вала двигателя, не нагруженного маятником. Считаем, что обратное влияние маятника на возбудитель сказывается на скорости вращения вала таким образом, что  $\frac{\omega}{c} = 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  достаточно малая величина. В качестве  $L[\omega(\tau)]$  используем статическую характеристику возбудителя, когда  $\frac{L[\omega(\tau)] - H[\omega(\tau)]}{Ic} = \varepsilon M[\omega(\tau)]$ . В результате система уравнений (4.52), (4.53) преобразуется в эквивалентную ей систему

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta(\tau)}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{c}, \quad \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} = \varepsilon M[\omega(\tau)] - \frac{\varepsilon p_1}{c} \omega_0^2 \cos \Theta(\tau) - \frac{p_1 \omega_0}{k} \times \\ \times \left\{ \left[ \frac{d\alpha(\tau - \Delta)}{d\tau} \right]^2 \cos \alpha(\tau - \Delta) + \varepsilon \left[ \frac{\omega^2(\tau - 2\Delta)}{c^2} \sin \Theta(\tau - 2\Delta) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k\varepsilon d\omega(\tau - 2\Delta)}{\omega_0 d\tau} \cos \Theta(\tau - 2\Delta) \right] \sin^2 \alpha(\tau - \Delta) - \varepsilon \mu \frac{d\alpha(\tau - \Delta)}{d\tau} \sin \alpha(\tau - \Delta) - \right. \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}
& - \varepsilon^2 k^2 \sin^2 \alpha(\tau - \Delta) \Big\} \cos \Theta(\tau) - \varepsilon p_2 \frac{\omega(\tau - 2q)}{c} \cos \theta(\tau - 2q) \cos \Theta(\tau), \\
& \frac{d^2 \alpha(\tau)}{d\tau^2} + \varepsilon \mu \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} + k^2 \varepsilon^2 \sin \alpha(\tau) - \varepsilon \left[ \frac{\omega^2(\tau - \Delta)}{c^2} \sin \Theta(\tau - \Delta) + \right. \\
& \left. + \frac{k\varepsilon d\omega(\tau - \Delta)}{\omega_0 d\tau} \cos \Theta(\tau - \Delta) \right] \sin \alpha(\tau) = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\varepsilon p_1 = \frac{mal}{I}, \varepsilon p_2 = \beta a^2 I, \varepsilon \mu = \frac{\lambda}{c}, k^2 = \frac{gl}{a^2 c^2}, \Delta = ch, q = cp.$$

Для исследования системы уравнений (4.54) применим метод усреднения. Посредством замены переменных [45]

$$\alpha(\tau) = x(\tau) - \varepsilon \sin \Theta(\tau) \sin x(\tau), \quad (4.55)$$

$$\frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} = \varepsilon y(\tau) - \varepsilon \frac{\omega(\tau - \Delta)}{c} \cos \Theta(\tau - \Delta) \sin x(\tau),$$

которая является модификацией замены, предложенной в [12], система (4.54) приводится к виду [45]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Theta(\tau)}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{c}, \quad \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} = \varepsilon M[\omega(\tau)] - \frac{\varepsilon p_1 \omega_0 \omega^2(\tau - 2\Delta)}{k c^2} \times \\
&\times \sin \Theta(\tau - 2\Delta) \cos \Theta(\tau) \sin^2 x(\tau - \Delta) - \varepsilon p_2 \frac{\omega(\tau - 2q)}{c} \cos \Theta(\tau - 2q) \times \\
&\times \cos \Theta(\tau) + \varepsilon^2 \dots, \quad (4.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx(\tau)}{d\tau} &= \varepsilon y(\tau) + \varepsilon \sin x(\tau) \left[ \frac{\omega(\tau)}{c} \cos \Theta(\tau) - \frac{\omega(\tau - \Delta)}{c} \cos \Theta(\tau - \Delta) \right] + \varepsilon^2 \dots, \\
\frac{dy(\tau)}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau - \Delta)}{c} \cos \Theta(\tau - \Delta) \cos x(\tau) \left\{ \varepsilon y(\tau) + \varepsilon \sin x(\tau) \left[ \frac{\omega}{c} \cos \Theta(\tau) - \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{\omega(\tau - \Delta)}{c} \cos \Theta(\tau - \Delta) \right] \right\} - \mu \left[ \varepsilon y(\tau) - \varepsilon \frac{\omega(\tau - \Delta)}{c} \cos \Theta(\tau - \Delta) \sin x(\tau) \right] - \\
&- k^2 \varepsilon \sin x(\tau) - \left[ \frac{\omega^2(\tau - \Delta)}{c^2} \sin \Theta(\tau - \Delta) \right] \varepsilon \sin \Theta(\tau) \sin x(\tau) \cos x(\tau).
\end{aligned}$$

Целью дальнейшего исследования будут установившиеся режимы взаимодействия. Поэтому, учитывая структуру уравнений (4.56), функцию  $\Theta(\tau)$  в первом приближении, можно представить в виде [174]

$$\Theta(\tau) = \frac{\omega(\tau)\tau}{c} + \varepsilon \Phi(\tau), \quad (4.57)$$

где  $\Phi(\tau)$  — некоторая периодическая функция.

Используя (4.57), получим систему уравнений, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 3.3 работы [164], обосновывающей применение метода усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на бесконечном интервале времени. Проводя операцию усреднения по явно входящему времени  $\tau$  по методике, предложенной в [164], приходим к системе уравнений первого приближения

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{d\tau} &= \varepsilon \left[ M(\omega) + \frac{p_1\omega_0\omega^2}{2kc^2} \sin \frac{2\omega\Delta}{c} \sin^2 x - \frac{p_2\omega}{2c} \cos \frac{2q\omega}{c} \right], \\ \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon y,\end{aligned}\tag{4.58}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\varepsilon\mu y - k^2\varepsilon \sin x - \varepsilon \frac{\omega^2}{2c^2} \cos \frac{\omega\Delta}{c} \sin x \cos x.$$

Приступим к отысканию стационарных решений  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  системы (4.58), соответствующих положениям равновесия. Очевидно, что  $\bar{y} = 0$ , а  $\bar{\omega}$  и  $\bar{x}$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned}M(\omega) + \frac{p_1\omega_0\omega^2}{c^2} \sin \frac{2\omega\Delta}{c} \sin^2 x - \frac{p_2\omega}{2c} \cos \frac{2q\omega}{c} &= 0, \\ \sin x \left( k^2 + \frac{\omega^2}{2c^2} \cos \frac{\omega\Delta}{c} \cos x \right) &= 0.\end{aligned}\tag{4.59}$$

Согласно [164], стационарному решению  $(0, \bar{\omega}, \bar{x})$  усредненной системы (4.58) соответствует единственное периодическое решение точной системы. Это означает, что маятник совершает малые колебания около угла  $\bar{x}$  при скорости вращения вала, близкой  $\bar{\omega}$ . Как следует из уравнений (4.59), запаздывание воздействий изменяет как скорость  $\bar{\omega}$ , так и величину угла  $\bar{x}$ . Особо следует подчеркнуть, что наличие запаздывания может привести к появлению стационарных скоростей вращения вала  $\bar{\omega}$ , больших чем  $c$  (скорость вращения вала без нагрузки), что не характерно для колебательных систем с ограниченным возбуждением [98, 174]. Вышеуказанный эффект возникает потому, что запаздывание может проводить значительную коррекцию сил, действующих на систему. Так, сила вязкого трения в подвесе при некоторых значениях запаздывания может преобразовываться в «отрицательное»



трение. Кроме того, второй момент в первом уравнении (4.59) может быть (исключительно благодаря  $\Delta \neq 0$ ) положительным. Все это приводит к появлению решений  $\bar{\omega}$ , больших  $c$ .

Система трансцендентных уравнений (4.59) допускает бесконечное множество решений, которые распадаются на два класса решений. Первый – это решения вида:

$$\bar{y} = 0, \quad \bar{x} = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.60)$$

а  $\bar{\omega}$  определяется из уравнения

$$M(\bar{\omega}) = S_1(\bar{\omega}), \quad S_1(\bar{\omega}) = \frac{p_2 \bar{\omega}}{2c} \cos \frac{2\bar{\omega}q}{c}. \quad (4.61)$$

Этому классу решений соответствуют малые колебания маятника около нижнего ( $n$  — четное) или верхнего ( $n$  — нечетное) положений равновесия. Заметим, что запаздывание  $h$  не влияет на существование первого класса решений.

Ко второму классу стационарных решений системы уравнений (4.59), соответствующих ее положениям равновесия, принадлежат решения

$$\bar{x} = \pm \arccos \frac{-2k^2 c^2}{\bar{\omega}^2 \cos \frac{\bar{\omega}\Delta}{c}} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.62)$$

где  $\bar{\omega}$  — решение уравнения

$$M(\bar{\omega}) = S_2(\bar{\omega}); \quad (4.63)$$

$$S_2(\bar{\omega}) = -\frac{p_1 \omega_0 \bar{\omega}^2}{2kc^2} \sin \frac{2\bar{\omega}\Delta}{c} \left[ 1 - \frac{4k^2 c^4}{\bar{\omega}^4 \cos^2 \frac{\bar{\omega}\Delta}{c}} \right] + \frac{p_2 \bar{\omega}}{2c} \cos \frac{2\bar{\omega}q}{c}.$$

Этот класс решений описывает малые колебания маятника около, так называемых, "промежуточных" (между верхним и нижним) положений равновесия. Причем для некоторых  $\bar{\omega}$  не существует решений уравнения (4.62). Если же решения (4.62) существуют, то как для первого (4.60), (4.61), так и для второго (4.62), (4.63) класса решений каждой стационарной скорости вращения  $\bar{\omega}$  соответствуют два стационарных угла отклонения маятника  $\bar{x}_1$ ,

$\bar{x}_2$ , лежащие в интервале  $[0, 2\pi)$ . Все остальные решения представимы в виде  $\bar{x}_i \pm 2n\pi$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  ( $i = 1; 2$ ).

Исследуем устойчивость стационарных решений системы (4.58). Система уравнений в вариациях, построенная для системы (4.58), имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\delta\omega}{d\tau} &= \varepsilon(A\delta\omega + F\delta x), \\ \frac{d\delta x}{d\tau} &= \varepsilon\delta y, \\ \frac{d\delta y}{d\tau} &= \varepsilon(C\delta\omega + D\delta x + E\delta y),\end{aligned}\tag{4.64}$$

где

$$\begin{aligned}A &= \frac{dM(\bar{\omega})}{d\omega} + \frac{p_1\omega_0\bar{\omega}}{kc^2} \sin \frac{2\bar{\omega}\Delta}{c} \sin^2 \bar{x} + \frac{p_1\omega_0\bar{\omega}^2\Delta}{kc^3} \cos \frac{2\bar{\omega}\Delta}{c} \sin^2 \bar{x} - \\ &\quad - \frac{p_2}{2c} \cos \frac{2\bar{\omega}q}{c} + \frac{p_2\bar{\omega}q}{c}, \\ F &= \frac{p_1\omega_0\bar{\omega}^2}{kc^2} \sin \bar{x} \cos \bar{x} \sin \frac{2\bar{\omega}\Delta}{c}, \quad C = -\frac{\bar{\omega}}{c^2} \cos \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} \sin \bar{x} \cos \bar{x} + \\ &\quad + \frac{\bar{\omega}^2\Delta}{2c^3} \sin \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} \sin \bar{x} \cos \bar{x}, \\ D &= -k^2 \cos \bar{x} - \frac{\bar{\omega}^2}{2c^2} \cos \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} \cos 2\bar{x}, \quad E = -\mu.\end{aligned}\tag{4.65}$$

Воспользовавшись критерием Гурвица, достаточные условия асимптотической устойчивости стационарных решений можно записать при помощи неравенств [45]:

$$A + E < 0, \quad DA - F > 0, \quad FC + ED > AE(A + E).\tag{4.66}$$

Для первого класса решений (4.60), (4.61) полученные условия существенно упрощаются и принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dM(\bar{\omega})}{d\omega} - \frac{p_2}{2c} \cos \frac{2\bar{\omega}q}{c} + \frac{p_2\bar{\omega}q}{c^2} \sin \frac{2\bar{\omega}q}{c} &< 0, \\ \cos \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} &> (-1)^{n+1} \frac{2gl}{a^2\bar{\omega}^2}.\end{aligned}\tag{4.67}$$

Если  $\frac{gl}{a^2\bar{\omega}^2} > \frac{1}{2}$ , то условие (4.67) выполняется (при всех  $\Delta$ ) для  $n$  четного и (при всех  $\Delta$ ) не выполняется для  $n$  нечетного. Когда же  $\frac{gl}{a^2\bar{\omega}^2} < \frac{1}{2}$  справедливость неравенства (4.67) существенно зависит от  $\Delta$ . Следует отметить, что условие (4.67) совпадает с полученным в работе [70] условием устойчивости маятника при идеальном возбуждении, когда  $\omega$  является наперед заданной постоянной величиной.

Рассмотрим на конкретном примере, как сложно и многообразно при наличии запаздывания может протекать процесс взаимодействия вращения вала двигателя и малых колебаний маятника около определенных положений динамического равновесия. Для изучения характерных особенностей процесса взаимодействия ограничимся теми положениями равновесия  $\bar{x}$ , которые удовлетворяют условию  $0 \leq x < 2\pi$ . Пусть система имеет следующие параметры:  $L(\omega) = (8,5 - 0,0085\omega)$  кГ·м;  $H(\omega) = 1,7 \cdot 10^{-4}\omega$  кГ·м;  $I = 3,4 \cdot 10^{-3}$  кГ·м сек<sup>2</sup>;  $m = 3,4 \cdot 10^{-3}$  кГ·м<sup>-1</sup>сек<sup>2</sup>;  $a = 0,02$  м;  $l = 2$  м;  $\beta = 0,2$  кГ·м<sup>-1</sup> сек;  $c = 980,4$  рад·сек<sup>-1</sup>. Проследим влияние запаздываний на существование и устойчивость стационарных режимов взаимодействия. На рис. 4.5а представлены графики функций  $\frac{M(\omega)}{c}$  (прямая 1),  $\frac{S_1(\omega)}{c}$  (кривая 2) и  $\frac{S_2(\omega)}{c}$  (кривые 3 и 4) при  $h = \frac{\Delta}{c} = 0,0083$ ,  $p = \frac{q}{c} = 0,02$ . Пересечение линий 1 и 2 определяет решение уравнения (4.61), а точки пересечения прямой 1 с кривыми 3, 4 являются решениями уравнения (4.63). Как уже было отмечено, каждой стационарной скорости соответствуют колебания маятника около двух положений динамического равновесия. Исследование устойчивости показало, что устойчивыми будут лишь режимы взаимодействия со стационарной скоростью вращения вала  $\bar{\omega} = 0,998$ с (точка  $T$  на рис. 4.5а). В этом случае маятник совершает устойчивые малые колебания около положения  $\bar{x}_1 = 1,166$  рад или  $\bar{x}_2 = 5,48$  рад. Стабилизировать колебания маятника около нижнего, верхнего и остальных промежуточных положений равновесия невозможно.

Увеличим величину запаздываний. Пусть  $h = 0,075$ , а  $p = 0,025$ . На

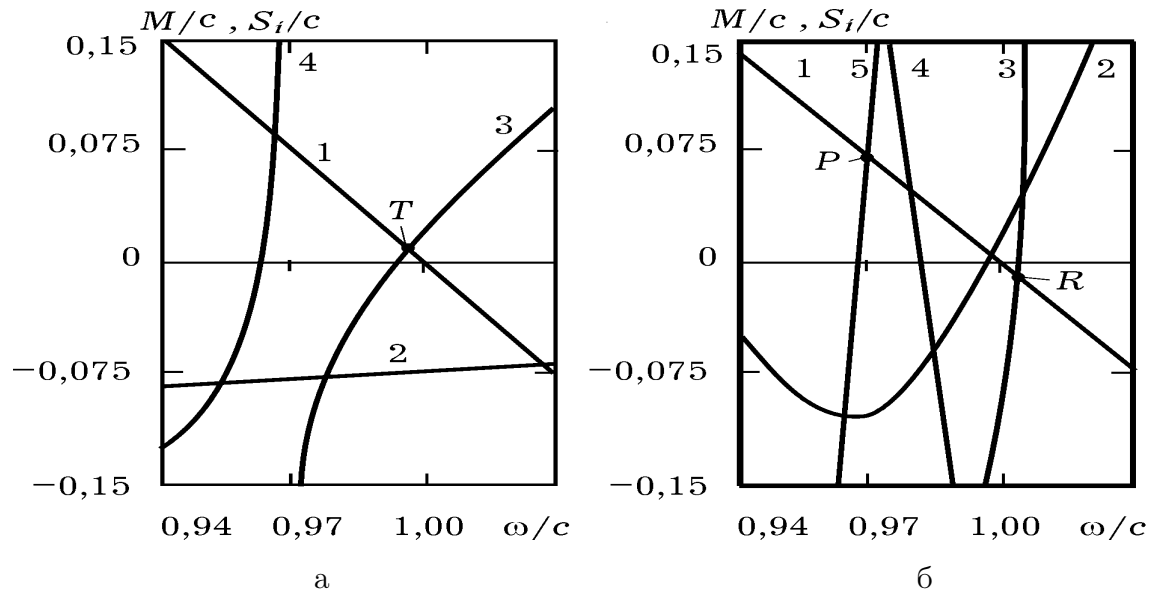


Рис. 4.5: Влияние запаздываний на существование и устойчивость стационарных режимов.

рис. 4.5б функция  $\frac{S_1(\omega)}{c}$  имеет вид кривой 2,  $\frac{S_2(\omega)}{c}$  разбивается на три ветви (кривые 3, 4, 5). Прямая  $\frac{M(\omega)}{c}$  от значений запаздывания не зависит. Как видно из рис. 4.5б, имеется корень  $\bar{\omega}$  уравнения (4.61) и три корня уравнения (4.63). Поэтому существует одна стационарная скорость для колебаний маятника около верхнего и нижнего положений и три стационарные скорости, при которых возможны движения маятника около шести промежуточных положений равновесия. Устойчивыми будут лишь режимы взаимодействия со скоростями вращения вала двигателя, соответствующими точкам пересечения  $P$  и  $R$  на рис. 4.5б. При  $\bar{\omega} = 0,97c$  (точка  $P$ ) маятник совершает устойчивые колебания около положений  $\bar{x}_1 = 1,331$  рад или  $\bar{x}_2 = 4,892$  рад, а при  $\bar{\omega} = 1,001c$  (точка  $R$ ) — около положений  $\bar{x}_1 = 1,01$  рад или  $\bar{x}_2 = 5,27$  рад. Интересно отметить, что точке  $R$  соответствует устойчивый режим со скоростью вращения вала  $\bar{\omega} > c$ . В этом случае запаздывание в системе таково, что момент сил обратного воздействия маятника на возбудитель является положительным, а не моментом противодействия.

При дальнейшем увеличении запаздываний ( $h = 0,2$ ;  $p = 0,09$ ) число возможных стационарных решений заметно увеличивается. На рис. 4.6а

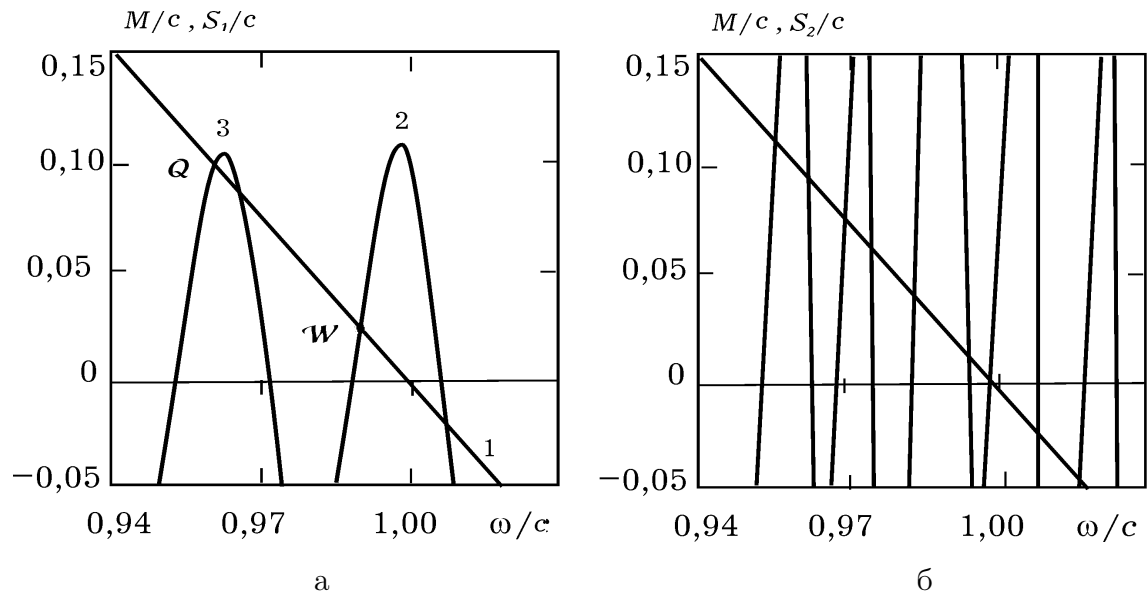


Рис. 4.6: Влияние запаздываний на существование и устойчивость стационарных режимов.

точки пересечения прямой 1 (график функции  $\frac{M(\omega)}{c}$ ) и кривых 2, 3 (график функции  $\frac{S_1(\omega)}{c}$ ) являются решениями уравнения (4.61). Как видно из рисунка, существуют четыре стационарные скорости вращения вала двигателя  $\bar{\omega}$  для первого класса решений (4.60), (4.61). Однако устойчивые режимы взаимодействия возможны только при скоростях  $\bar{\omega} = 0,96c$  (точка Q) и  $\bar{\omega} = 0,989c$  (точка W). Причем при таких скоростях маятник стабилизируется как в нижнем, так и в верхнем положении равновесия.

Графическое решение уравнения (4.63) представлено на рис. 4.6б. Здесь существует 9 стационарных решений уравнения (4.63), которым соответствуют малые колебания маятника около 14 промежуточных положений динамического равновесия, так как для двух корней уравнения (4.63) решений уравнения (4.62) не существует. Все найденные стационарные решения будут неустойчивыми. Заметим, что реализация какого-либо конкретного из устойчивых режимов взаимодействия зависит от начальных условий и протекания переходного режима при подходе к установившемуся.

Рассмотрим дополнительно к уже учтенным факторам запаздывания также  $\rho(t)$  – запаздывание реакции среды на динамическое состояние ма-

ятника. Наличие этого запаздывания, объясняется ограниченностью скорости звука в среде, в которой колеблется маятник. Предположим, что  $\rho(t)$  – неотрицательная, равномерная почти периодическая при  $t \in (-\infty, \infty)$  функция. Учет дополнительного фактора запаздывания приведет к появлению в уравнении (4.53) слагаемого  $\lambda \dot{\rho}[t - \rho(t)]$  ([109]) вместо слагаемого  $\lambda \dot{\rho}(t)$ . Все остальные члены системы уравнений движения (4.52)–(4.53) останутся неизменными. Далее, полностью повторяя сделанные в начале этого параграфа процедуры (замены переменных, преобразования уравнений и усреднение), получим следующую усредненную систему уравнений [109]:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} &= \varepsilon \left[ M(\omega) + \frac{p_1 \omega_0 \omega^2}{2kc^2} \sin \frac{2\omega \Delta}{c} \sin^2 x - \frac{p_2 \omega}{2c} \cos \frac{2q\omega}{c} \right], \\ \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\varepsilon (\mu y + k^2 \sin x + \frac{\omega^2}{2c^2} \cos \frac{\omega \Delta}{c} \sin x \cos x - \frac{\mu \omega}{c} G(\omega, \Delta, \eta)), \end{aligned} \quad (4.68)$$

где

$$G(\omega, \Delta, \eta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \cos\left(\frac{\omega}{c}\tau - \frac{\omega}{c}\Delta - \frac{\omega}{c}\eta(\tau)\right) d\tau, \quad \eta(\tau) = c\rho\left(\frac{\tau}{c}\right). \quad (4.69)$$

Как видим, усредненная система (4.68), которая получена при учете запаздывания среды, отличается от системы (4.58) наличием одного дополнительного члена в третьем уравнении. Этот дополнительный член зависит от запаздывания реакции среды и запаздывания влияния положения маятника на вращение вала двигателя.

Очевидно, что стационарные решения системы (4.68) также распадаются на два класса. Причем первый класс решений, как и в предыдущем случае, определяется из соотношений (4.60) – (4.61).

Ко второму классу принадлежат решения вида:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= 0, \quad \bar{x} = \pm \arccos \frac{2c^2}{\bar{\omega}^2 \cos \frac{\bar{\omega} \Delta}{c}} \left[ \frac{\mu \bar{\omega}}{c} G(\bar{\omega}, \Delta, \eta) - k^2 \right] + \\ &+ 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.70)$$

где  $\bar{\omega}$  – решение уравнения

$$M(\bar{\omega}) = -\frac{p_1\omega_0\bar{\omega}^2}{2kc^2} \sin \frac{2\bar{\omega}\Delta}{c} \left\{ 1 - \frac{4c^4}{\bar{\omega}^4 \cos^2 \frac{\bar{\omega}\Delta}{c}} \left[ \frac{\mu\bar{\omega}}{c} G(\bar{\omega}, \Delta, \eta) - k^2 \right] \right\} + \frac{p_2\bar{\omega}}{2c} \cos \frac{2\bar{\omega}\Delta}{c}. \quad (4.71)$$

Причем решения (4.71) существуют только при выполнении условия

$$\left| \frac{\frac{\mu\bar{\omega}}{c} G(\bar{\omega}, \Delta, \eta) - ck^2}{\cos \frac{\bar{\omega}\Delta}{c}} \right| \leq \frac{\bar{\omega}^2}{2c} \quad (4.72)$$

Таким образом, запаздывание реакции среды  $\eta(\tau)$  влияет на существование, количественное значение и число стационарных решений второго класса.

Условия асимптотической устойчивости обоих классов стационарных решений по прежнему записываются при помощи неравенств (4.66). Однако теперь в этих неравенствах величины  $A, F, E$  определяются по формулам (4.65), а величины  $C, D$  – по формулам [109]:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\bar{\omega}}{c^2} \left( \frac{\bar{\omega}\Delta}{2c} \sin \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} - \cos \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} \right) \sin \bar{x} \cos \bar{x} + \\ &\quad + \frac{\mu}{c} \left[ G(\bar{\omega}, \Delta, \eta) + \bar{\omega} \frac{\partial G(\bar{\omega}, \Delta, \eta)}{\partial \omega} \right] \sin \bar{x}; \\ D &= \left[ \frac{\mu\bar{\omega}}{c} G(\bar{\omega}, \Delta, \eta) - k^2 \right] \cos \bar{x} - \frac{\bar{\omega}^2}{2c^2} \cos \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} \cos 2\bar{x}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Для первого класса стационарных решений условия устойчивости упрощаются. Они могут быть записаны при помощи двух неравенств. Причем первое из этих неравенств совпадает с первым из неравенств (4.67), а второе имеет вид

$$2 \cos \frac{\bar{\omega}\Delta}{c} > \frac{(-1)^n c^2}{\bar{\omega}^2} \left[ \frac{\mu\bar{\omega}}{c} G(\bar{\omega}, \Delta, \eta) - k^2 \right]. \quad (4.74)$$

Как видно из полученных условий устойчивости, различные факторы запаздывания, в том числе запаздывание реакции среды, оказывают существенное влияние на устойчивость стационарных решений системы (4.68). Даже при незначительном изменении запаздываний величины  $A, F, C, D$  могут менять свой знак на противоположный, что приводит к заметному изменению границ областей устойчивости системы (4.68).

В качестве демонстрации такого влияния запаздываний на устойчивость первого класса стационарных решений рассмотрим случай, при котором запаздывание реакции среды равно

$$\rho(t) = d_0 + d_1 \sin \omega t,$$

где  $d_0$  и  $d_1$  – некоторые постоянные величины, причем  $|d_1| \leq d_0$ . Тогда, согласно (4.69),

$$G(\omega, \Delta, \eta) = J_1(\omega d_1) \cos \omega \left( \frac{\Delta}{c} + d_0 \right),$$

где  $J_1(\omega d_1)$  – функция Бесселя первого рода первого порядка от аргумента  $\omega d_1$ . В частности, если  $d_1 = 0$  (то есть  $\rho(t) = \text{const}$ ), то  $G(\omega, \Delta, \eta) = 0$ . Пусть  $\bar{\omega} = \Omega$  – одно из возможных решений уравнения (4.61). В этом случае маятник может совершать малые колебания около нижнего или верхнего положений равновесия при скорости вращения вала двигателя близкой к  $\Omega$ . Условие устойчивости (4.74) принимает вид

$$2 \cos \frac{\Omega \Delta}{c} > \frac{(-1)^n c^2}{\Omega^2} \left[ \frac{\mu \Omega}{c} J_1(\Omega d_1) \cos \Omega \left( \frac{\Delta}{c} + d_0 \right) - k^2 \right]. \quad (4.75)$$

Так как для реальных электродвигателей  $\frac{dM(\Omega)}{d\omega} < 0$ , то еще одно из условий устойчивости (а это первое из условий (4.67)) всегда выполняется, например, если

$$q = 0 \quad (4.76)$$

или

$$\frac{3\pi}{4} \leq \frac{\Omega q}{c} \leq \pi. \quad (4.77)$$

Таким образом, при выполнении одного из условий (4.76) или (4.77) из условия (4.75) вытекают следующие характеристики устойчивости колебаний маятника около нижнего и верхнего положений равновесия.

1. Пусть  $p = h = d_0 = d_1 = 0$  (случай отсутствия факторов запаздывания в рассматриваемой колебательной системе). Тогда колебания маятника около нижнего положения равновесия всегда устойчивы, а колебания около



верхнего положения равновесия устойчивы при  $\frac{gl}{a^2\Omega^2} < \frac{1}{2}$  и неустойчивы при  $\frac{gl}{a^2\Omega^2} > \frac{1}{2}$ .

2. Пусть  $h > 0, d_0 \geq 0, d_1 = 0$  (случай постоянного запаздывания реакции среды). Здесь при  $\frac{gl}{a^2\Omega^2} > \frac{1}{2}$ , независимо от значений  $h$ , колебания маятника около нижнего положения равновесия всегда устойчивы, а около верхнего неустойчивы. Однако при  $\frac{gl}{a^2\Omega^2} < \frac{1}{2}$ , в зависимости от значений запаздывания  $h$ , колебания маятника около нижнего и верхнего положений равновесия могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми.

3. Пусть  $p \geq 0, h > 0, d_0 \geq 0, d_1 \neq 0$  (случай переменного запаздывания реакции среды). Тогда, как и в предыдущем случае, в зависимости от значений запаздываний  $h$  и  $\rho(t)$  возможна как стабилизация, так и дестабилизация колебаний маятника около верхнего или нижнего положений равновесия. Но, в отличие от предыдущего случая, данная стабилизация или дестабилизация колебаний возможна и при  $\frac{gl}{a^2\Omega^2} > \frac{1}{2}$ .

#### 4.4 Резонансное взаимодействие маятниковых систем с неидеальным источником энергии при наличии запаздывания воздействий

Рассмотрим колебания маятника при вертикальной вибрации точки подвеса, возбуждаемой электродвигателем ограниченной мощности при учете переменных факторов запаздывания. Схема такой системы приведена на рис. 4.4 предыдущего параграфа.

Пусть электродвигатель  $D$  через кривошипно-шатунный механизм вызывает вертикальные колебания подвеса  $\Pi$  маятника (рис. 4.4). При повороте кривошипа  $a$  на угол  $\Theta$  подвес получает перемещение  $v(t) = a \sin \Theta[t - p_0(t)]$  (положительное направление оси  $v$  показано на рис. 4.4). Функция  $p_0(t)$  введена для учета запаздывания перемещения подвеса. Если маятник отклонился на угол  $\alpha$ , вертикальная составляющая сил, приложенных к подвесу, создает

на валу двигателя момент

$$am\{g + l\dot{\alpha}^2[t - h_1(t)] \cos \alpha[t - h_1(t)] + l\ddot{\alpha}[t - h_1(t)] \sin \alpha[t - h_1(t)]\},$$

где  $m$  — масса маятника,  $g$  — ускорение свободного падения,  $l$  — длина маятника,  $h_1(t)$  — запаздывание реакции кривошипа на воздействие силы инерции маятника.

Вертикальным перемещениям подвеса противодействует сила вязкого трения  $\beta\dot{v}(t)$ , где  $\beta$  — коэффициент вязкого трения. Тогда вращение вала двигателя с учетом противодействующего момента силы трения  $\beta a\dot{v}[t - p_1(t)] \cos \Theta(t)$  (функция  $p_1(t)$  учитывает запаздывание отклика кривошипа на влияние силы в подвесе) подчинено уравнению вида [47]:

$$\begin{aligned} I\ddot{\Theta}(t) = & L[\dot{\Theta}(t)] - H[\dot{\Theta}(t)] - am\{g + l\dot{\alpha}^2[t - h_1(t)] \cos \alpha[t - h_1(t)] + \\ & + l\ddot{\alpha}[t - h_1(t)] \sin \alpha[t - h_1(t)]\} \cos \Theta(t) - \beta a^2[1 - \dot{p}_0(t - p_1(t))]\dot{\Theta}[t - \\ & - p_1(t) - p_0(t - p_1(t))] \cos \Theta[t - p_1(t) - p_0(t - p_1(t))] \cos \Theta(t), \end{aligned} \quad (4.78)$$

где  $L[\dot{\Theta}(t)]$  — движущий момент;  $H[\dot{\Theta}(t)]$  — внутренний момент сил сопротивления вращению ротора;  $I$  — момент инерции ротора [174].

При вертикальных вибрациях подвеса колебания маятника с учетом запаздывания  $n(t)$  его собственных вертикальных перемещений по сравнению с  $v(t)$  будут описываться следующим уравнением [12, 47]

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(t) + \lambda\dot{\alpha}[t - \delta(t)] + \frac{g}{l} \sin \alpha(t) - \frac{a}{l} \{[1 - \dot{h}_2(t)]^2 \dot{\Theta}^2[t - h_2(t)] \sin \Theta[t - \\ - h_2(t)] + \ddot{h}_2(t) \dot{\Theta}[t - h_2(t)] \cos[t - h_2(t)] - \\ - [1 - \dot{h}_2(t)]^2 \ddot{\Theta}[t - h_2(t)] \cos \Theta[t - h_2(t)]\} \sin \alpha(t) = 0, \end{aligned} \quad (4.79)$$

где  $h_2(t) = p_0(t) + n(t)$  — запаздывание вертикальных вибраций маятника;  $\lambda$  — коэффициент вязкого сопротивления среды;  $\delta(t)$  — запаздывание реакции среды на динамическое состояние маятника, порожденное ограниченностью скорости звука в этой среде.

Учет запаздываний  $p_0, p_1, h_1, h_2$  обусловлен тем, что скорость волны возмущения при силовом воздействии на элементы конструкции имеет конечную величину, зависящую от свойств внешних полей, например, переменного по времени температурного поля. Будем считать, что функции  $p_0(t), p_1(t), h_1(t), h_2(t)$  и  $\delta(t)$  являются неотрицательными, равномерно-непрерывными и почти периодическими при  $t \in (-\infty, \infty)$ . Кроме того, пусть  $\dot{p}_0(t)$  и  $\dot{h}_2(t)$  – равномерно-непрерывны при  $t \in (-\infty, \infty)$ .

Система нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа (4.78)–(4.79) свидетельствует о сложном характере процесса взаимодействия вала двигателя и колебаний маятника при вертикальных вибрациях подвеса.

Рассмотрим случай главного параметрического резонанса, когда скорость вращения вала двигателя  $\dot{\Theta}(t)$  близка к удвоенной собственной частоте маятника  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Предположим, что выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{a}{l} = \varepsilon; \quad \lambda = \varepsilon\mu; \quad \omega_0 - \frac{\dot{\Theta}(t)}{2} = \varepsilon\gamma_0(t); \quad b_1 = \frac{mga}{I}; \quad \varepsilon b_2 = \frac{\beta a^2}{I}; \\ \frac{L[\dot{\Theta}(t)] - [H\dot{\Theta}(t)] + amg \cos \Theta(t)}{I} = \varepsilon M_0[\Theta(t), \dot{\Theta}(t)], \end{aligned} \quad (4.80)$$

где  $\varepsilon \ll 1$ .

Введем замену переменных

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}(t) = \omega(t); \quad \alpha(t) = \sqrt{\varepsilon}x(t) \cos \left[ \frac{\Theta(t)}{2} + y(t) \right]; \\ \dot{\alpha}(t) = -\sqrt{\varepsilon}\omega_0 x(t) \sin \left[ \frac{\Theta(t)}{2} + y(t) \right]. \end{aligned} \quad (4.81)$$

При помощи замены переменных (4.81) система уравнений (4.78) – (4.79) может быть приведена к виду [47]:

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta}(t) &= \omega(t); \\
\dot{\omega}(t) &= \varepsilon M_0[\Theta(t), \omega(t)] - \varepsilon b_1 x^2[t - h_1(t)] \cos[\Theta(t - h_1(t)) + 2y(t - \\
&- h_1(t))] \cos \Theta(t) - \varepsilon b_2 [1 - p_3(t)] \omega[t - p_2(t)] \cos \Theta[t - p_2(t)] \cos \Theta(t) + \\
&+ \varepsilon^2 \dots; \\
\dot{x}(t) &= \varepsilon \left\{ -\mu x[t - \delta(t)] \sin \left[ \frac{\Theta(t - \delta(t))}{2} + y(t - \delta(t)) \right] \sin \left[ \frac{\Theta(t)}{2} + \right. \right. \\
&+ y(t) \left. \right] - \frac{\omega_0}{6} x^3(t) \cos^3 \left[ \frac{\Theta(t)}{2} + y(t) \right] \sin \left[ \frac{\Theta(t)}{2} + y(t) \right] + \frac{[1 - \dot{h}_2(t)]^2}{2\omega_0} \times \\
&\times \omega^2[t - h_2(t)] x(t) \sin \Theta[t - h_2(t)] \sin[\Theta(t) + 2y(t)] + \frac{\ddot{h}_2(t)}{2\omega_0} \omega[t - \\
&- h_2(t)] x(t) \cos \Theta[t - h_2(t)] \sin[\Theta(t) + 2y(t)] \left. \right\} + \varepsilon^2 \dots; \\
\dot{y}(t) &= \left\{ \gamma_0(t) - \frac{\mu x[t - \delta(t)]}{x(t)} \sin \left[ \frac{\Theta(t - \delta(t))}{2} + y(t - \delta(t)) \right] \cos \left[ \frac{\Theta(t)}{2} + \right. \right. \\
&+ y(t) \left. \right] - \frac{\omega_0}{6} x^2(t) \cos^4 \left[ \frac{\Theta(t)}{2} + y(t) \right] + \frac{[1 - \dot{h}_2(t)]^2}{\omega_0} \omega^2[t - \\
&- h_2(t)] \sin[t - h_2(t)] \cos^2 \left[ \frac{\Theta(t)}{2} + y(t) \right] + \frac{\ddot{h}_2(t)}{\omega_0} \omega[t - \\
&- h_2(t)] \cos[t - h_2(t)] \cos^2 \left[ \frac{\Theta(t)}{2} + y(t) \right] \left. \right\} + \varepsilon^2 \dots
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Здесь

$$p_2(t) = p_1(t) + p_0(t - p_1(t)); \quad p_3(t) = \dot{p}_0(t - p_1(t)).$$

Покажем, что для исследования системы уравнений (4.82) применим метод усреднения. Действительно, решение первого уравнения системы (4.82) формально будем искать в виде

$$\Theta(t) = \omega(t)t + \varepsilon \Phi(t). \tag{4.83}$$

Подставляя (4.83) во второе, третье и четвертое уравнения (4.82), получим

систему трех уравнений, правые части которых пропорциональны малому параметру  $\varepsilon$ . В дальнейшем эту систему уравнений будем называть точной системой уравнений. Если ограничиться случаем установившихся скоростей вращения вала двигателя, то точная система уравнений будет удовлетворять всем условиям теоремы 3.3 [164], обосновывающей применение метода усреднения на бесконечном интервале времени для систем с переменным запаздыванием. Выполнив процедуру усреднения по методике работы [164], получим следующую систему уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \varepsilon \left\{ M(\omega) - \frac{1}{2} \left[ b_1 x^2 F_1(\omega, y, h_1) + b_2 \omega F_2(\omega, p_2, p_3) \right] \right\}; \\ \dot{x} &= \varepsilon x \left[ \frac{\omega^2}{4\omega_0} F_3(\omega, y, h_2) + \frac{\omega}{4\omega_0} F_4(\omega, y, h_2) - \frac{\mu}{2} F_5(\omega, y, \delta) \right]; \\ \dot{y} &= \varepsilon \left[ 2\gamma - \frac{\omega_0}{16} x^2 + \frac{\omega^2}{4\omega_0} F_6(\omega, y, h_2) + \frac{\omega}{4\omega_0} F_7(\omega, y, h_2) - \frac{\mu}{2} F_8(\omega, y, \delta) \right],\end{aligned}\tag{4.84}$$

где

$$F_1(\omega, y, h_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\cos(2\omega t - \omega h_1 + 2y) + \cos(2y - \omega h_1)] dt;$$

$$F_2(\omega, p_2, p_3) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (1 - p_3) [\cos(2\omega t - \omega p_2) + \cos \omega p_2] dt;$$

$$F_3(\omega, y, h_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (1 - \dot{h}_2)^2 [\cos(2y + \omega h_2) - \cos(2\omega t - \omega h_2 + 2y)] dt;$$

$$F_4(\omega, y, h_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{h}_2 [\sin(2y + \omega h_2) + \sin(2\omega t - \omega h_2 + 2y)] dt;$$

$$F_5(\omega, y, \delta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \cos \frac{\omega}{2} \delta - \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{2} \delta + 2y \right) \right] dt;$$

$$\begin{aligned}
F_6(\omega, y, h_2) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (1 - \dot{h}_2)^2 [\sin(2\omega t - \omega h_2 + 2y) + \\
&\quad + 2 \sin(\omega t - \omega h_2) - \sin(2y + \omega h_2)] dt; \\
F_7(\omega, y, h_2) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{h}_2 [\cos(2\omega t - \omega h_2 + 2y) + 2 \cos(\omega t - \omega h_2) + \\
&\quad + \cos(2y + \omega h_2)] dt;
\end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned}
F_8(\omega, y, \delta) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sin \left( \omega t - \frac{\omega}{2} \delta + 2y \right) - \cos \frac{\omega}{2} \delta \right] dt; \\
M(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M_0(\omega t, \omega) dt; \quad \gamma = \frac{1}{2} \left( \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right).
\end{aligned}$$

Все пределы (4.85) существуют, так как подынтегральные выражения являются почти периодическими функциями. В силу теоремы 3.3 из [164] положению равновесия  $\bar{\omega}, \bar{x}, \bar{y}$  усредненной системы (4.84) соответствует единственное почти периодическое решение точной системы уравнений, лежащее в  $\varepsilon$ -окрестности решения  $\bar{\omega}, \bar{x}, \bar{y}$ . Это решение точной системы может быть представлено в виде

$$\omega = \bar{\omega} + \varepsilon f_1(t), \quad x = \bar{x} + \varepsilon f_2(t), \quad y = \bar{y} + \varepsilon f_3(t), \tag{4.86}$$

где  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$  – некоторые равномерно непрерывные, почти периодические функции. Подставляя (4.86) в первое уравнение системы (4.82), получаем для  $\Theta(t)$  решение вида (4.83), в котором  $\omega(t) = \bar{\omega}$ , а  $\Phi(t)$  – некоторая почти периодическая функция. Это доказывает, для случая постоянных скоростей вращения вала двигателя, правильность представления решений первого уравнения системы (4.82) в первом приближении по формуле (4.83). Заметим, что при произвольных скоростях, то есть при изучении переходных процессов, теорема 3.3 [164] не имеет места, так как не выполняется условие о равномерной почти периодичности по  $t$  правых частей точной системы уравнений. Однако и в этом случае правильность вышеизложенного

формализма применения метода усреднения может быть обоснована при помощи теорем, доказанных в [103]. Соответствие между свойствами решений точной и усредненной систем уравнений, а следовательно, и представление (4.83) могут рассматриваться на как угодно большом (при достаточно малых  $\varepsilon$ ), но конечном интервале времени.

Конкретное влияние запаздываний на динамические характеристики процесса взаимодействия рассмотрим для случая постоянных запаздываний ( $p_0(t) = p_1(t) = p = \text{const}$ ;  $h_1(t) = h_2(t) = h = \text{const}$ ;  $\delta(t) = \delta = \text{const}$ ). Тогда, воспользовавшись формулами (4.85), усредненную систему уравнений (4.84) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \varepsilon \left[ M(\omega) - \frac{b_1}{2} x^2 \cos(2y - \omega h) - \frac{b_2}{2} \omega \cos 2\omega p \right]; \\ \dot{x} &= \varepsilon x \left[ \frac{\omega^2}{4\omega_0} \cos(2y + \omega h) - \frac{\mu}{2} \cos \frac{\omega}{2} \delta \right]; \\ \dot{y} &= \varepsilon \left[ 2\gamma - \frac{\omega_0}{16} x^2 + \frac{\mu}{2} \sin \frac{\omega}{2} \delta - \frac{\omega^2}{4\omega_0} \sin(2y + \omega h) \right].\end{aligned}\tag{4.87}$$

Приравнявая нулю правые части системы уравнений (4.87), получим уравнения для определения стационарных решений, соответствующих положениям равновесия. Очевидно, что возможные стационарные решения  $\bar{\omega}, \bar{x}, \bar{y}$  системы уравнений (4.87) распадаются на два класса. Первый – это решения вида:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 0; \\ \bar{y} &= \left[ \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \left( \frac{8\omega_0\gamma}{\bar{\omega}^2} + \frac{2\mu\omega_0}{\bar{\omega}^2} \sin \frac{\bar{\omega}}{2} \delta \right) - \bar{\omega} h \right] + \frac{k\pi}{2}, \\ k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}\tag{4.88}$$

При этом скорость вращения вала двигателя  $\bar{\omega}$  определяется из уравнения

$$M(\bar{\omega}) = \frac{b_2}{2} \bar{\omega} \cos 2\bar{\omega} p.\tag{4.89}$$

Первый класс решений существует только при выполнении условия

$$\left| 8\gamma + 2\mu \sin \frac{\bar{\omega}}{2} \delta \right| \leq \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_0}.\tag{4.90}$$

Этому классу решений соответствуют колебания маятника с как угодно малой амплитудой около нижнего положения равновесия.

Второй класс стационарных решений определяется по формулам:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \pm 2\sqrt{\frac{1}{\omega_0} \left( 8\gamma + 2\mu \sin \frac{\bar{\omega}}{2} \delta \pm \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{4\mu^2\omega_0^2}{\bar{\omega}^4} \cos^2 \frac{\bar{\omega}}{2} \delta} \right)}; \\ \bar{y} &= \frac{1}{2} \left[ \pm \arccos \left( \frac{2\mu\omega_0}{\bar{\omega}^2} \cos \frac{\bar{\omega}}{2} \delta \right) - \bar{\omega}h \right] + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}\quad (4.91)$$

При этом  $\bar{\omega}$  определяются из уравнения

$$M(\bar{\omega}) - \frac{b_2}{2}\bar{\omega} \cos 2\bar{\omega}p - \frac{b_1}{2}\bar{\omega} \cos(2\bar{y} - \bar{\omega}h) = 0. \quad (4.92)$$

Решения второго класса существуют только при выполнении условия

$$\left| 2\mu \cos \frac{\bar{\omega}}{2} \delta \right| \leq \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_0}. \quad (4.93)$$

Второму классу стационарных решений соответствуют колебания маятника с ненулевой стационарной амплитудой. Как следует из (4.91), ширина,

$$\frac{4\bar{\omega}^2}{\omega_0^2} \sqrt{1 - \frac{4\mu^2\omega_0^2}{\bar{\omega}^4} \cos^2 \frac{\bar{\omega}}{2} \delta},$$

и сдвиг,

$$4\mu \sin \frac{\bar{\omega}}{2} \delta,$$

резонансной области, а также наклон амплитудно–частотной характеристики зависят от величины запаздывания  $\delta$ .

В свою очередь, запаздывания  $p$  и  $h$  влияют на величину стационарной скорости вращения вала двигателя  $\bar{\omega}$ . Так как некоторые функции, входящие в уравнения (4.89), (4.92), периодически зависят от запаздываний  $p$  и  $h$ , это может привести к увеличению количества корней данных уравнений, то есть к новым режимам взаимодействия. Кроме того, запаздывание  $p$  уменьшает момент противодействия силы трения в подвесе на валу двигателя.

Исследуем устойчивость полученных стационарных решений системы уравнений (4.87). Составляя для этой системы систему в вариациях и при-



меняя критерий Гурвица, получим следующие достаточные условия асимптотической устойчивости стационарных решений системы уравнений (4.87) [47], соответствующих положениям равновесия:

$$\begin{aligned}
 C + S + A &< 0; \\
 A(DN - CS) + B(RS - NF) + E(FC - RD) &> 0; \\
 (A + S)(EF - AS) + (C + S)(DN - CS) + (A + C)(BR - \\
 - AC) - 2SAC + RDF + BNF &> 0.
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 A &= \varepsilon \left[ \frac{dM(\bar{\omega})}{d\omega} - \frac{b_1}{2} h \bar{x}^2 \sin(2\bar{y} - \bar{\omega}h) - \frac{b_2}{2} (\cos 2\bar{\omega}p - 2p\bar{\omega} \sin \bar{\omega}p) \right]; \\
 B &= \varepsilon \bar{x} \left[ \frac{\bar{\omega}}{2\omega_0} \cos(2\bar{y} + \bar{\omega}h) - \frac{\bar{\omega}^2}{4\omega_0} h \sin(2\bar{y} + \bar{\omega}h) + \frac{\mu}{4} \delta \sin \frac{\bar{\omega}}{2} \delta \right]; \\
 C &= \varepsilon \left[ \frac{\bar{\omega}^2}{4\omega_0} \cos(2\bar{y} + \bar{\omega}h) - \frac{\mu}{2} \cos \frac{\bar{\omega}}{2} \delta \right]; \\
 D &= -\varepsilon \bar{x} \frac{\bar{\omega}}{2\omega_0} \sin(2\bar{y} + \bar{\omega}h); \quad F = \varepsilon b_1 \bar{x}^2 \sin(2\bar{y} - \bar{\omega}h) \\
 E &= \varepsilon \left[ \frac{\mu}{4} \delta \cos \frac{\bar{\omega}}{2} \delta - \frac{\bar{\omega}}{2\omega_0} \sin(2\bar{y} + \bar{\omega}h) - \frac{\bar{\omega}^2}{4\omega_0} h \cos(2\bar{y} + \bar{\omega}h) \right] - \frac{1}{2}; \\
 N &= -\frac{\varepsilon \omega_0}{8} \bar{x}; \quad R = -\varepsilon b_1 \bar{x} \cos(2\bar{y} - \bar{\omega}h); \quad S = -\frac{\varepsilon \bar{\omega}^2}{2\omega_0} \cos(2\bar{y} + \bar{\omega}h).
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

Все величины в условиях устойчивости (4.95) зависят от запаздываний. Даже при незначительном изменении значений запаздываний, выражения  $A, B, \dots, S$  могут менять свой знак на противоположный, что приводит к существенной коррекции областей устойчивости стационарных решений системы уравнений (4.87). Поэтому наличие запаздываний может как способствовать стабилизации, так и вызывать дестабилизацию стационарных режимов взаимодействия.

Для первого класса решений (4.88) – (4.89) условия устойчивости (4.95)

значительно упрощаются и могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dM(\bar{\omega})}{d\omega} - \frac{b_2}{2}(\cos 2\bar{\omega}p - 2p\bar{\omega} \sin \bar{\omega}p) &< 0; \\ \frac{\bar{\omega}^2}{4\omega_0} \cos(2\bar{y} + \bar{\omega}h) - \frac{\mu}{2} \cos \frac{\bar{\omega}}{2} \delta &< 0; \\ \frac{\bar{\omega}^2}{2\omega_0} \cos(2\bar{y} + \bar{\omega}h) &> 0. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Так как в этом случае

$$\cos(2\bar{y} + \bar{\omega}h) = \pm \sqrt{1 - \frac{16\omega_0^2}{\bar{\omega}^4} \left( 2\gamma + \frac{\mu}{2} \sin \frac{\bar{\omega}}{2} \delta \right)^2},$$

то условия устойчивости (4.96) не зависят от значения запаздывания  $h$ . Также отметим, что всегда существуют стационарные решения, для которых выполняется третье из условий (4.96).

На рис. 4.7а показаны области существования обоих классов решений системы уравнений (4.87) при изменении коэффициента вязкости  $\mu$  и величины запаздывания  $\delta$ , когда  $\omega_0 = 4.05\Gamma\text{ц}$ ;  $\omega = 8\Gamma\text{ц}$ ;  $\gamma = 1\Gamma\text{ц}$ .

Область существования (4.90) первого класса решений (4.88), (4.89) расположена ниже кривых 1 и 2 до оси абсцисс. Соответственно область существования (4.93) второго класса решений (4.91), (4.92) ниже кривых 3. Следовательно, при одних значениях  $\mu$  и  $\delta$  ни один стационарный режим не существует, при других – могут существовать оба. Также на рис. 4.7а представлены области, где выполняются первые два из условий устойчивости первого класса решений (4.96). Эти области находятся выше кривых 4 и 5. Таким образом, при параметрах, соответствующих заштрихованным областям, колебания маятника около нижнего положения равновесия могут быть устойчивыми, если статическая характеристика двигателя такова, что выполняется первое из условий устойчивости (4.96). Картина расположения областей существования и устойчивости, данная на рис. 4.7а, будет повторяться с периодом  $\frac{\pi}{2}$ .

На рис. 4.7б показаны области существования и устойчивости (номера

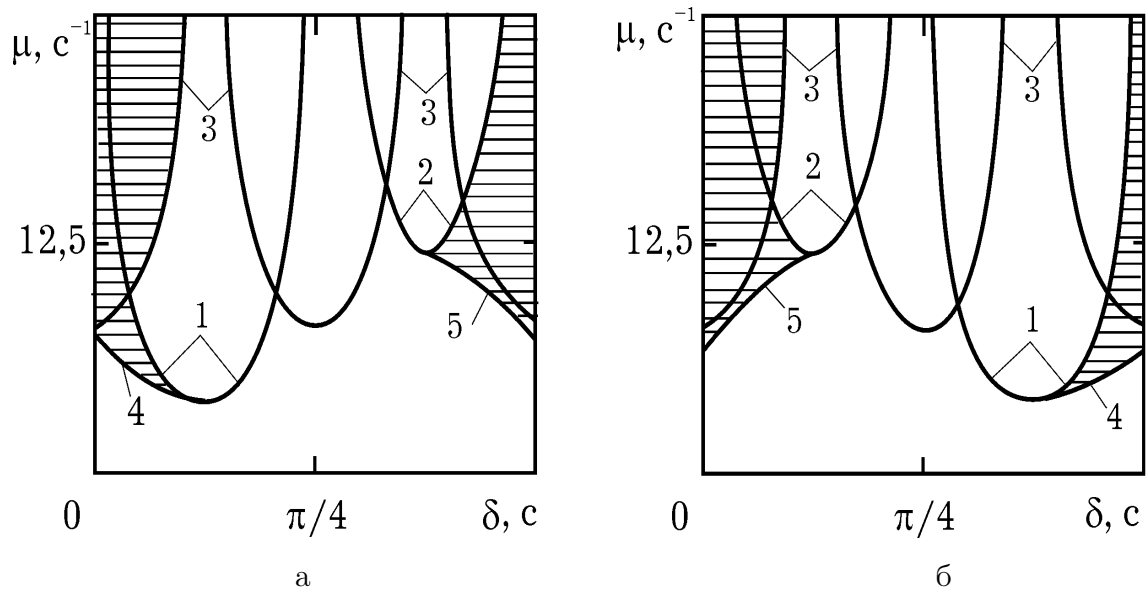


Рис. 4.7: Области существования и устойчивости стационарных решений.

кривых совпадают с представленными на рис. 4.7а) для случая отрицательной расстройки частот, когда  $\omega_0 = 3.95\text{Гц}$ ;  $\omega = 8\text{Гц}$ ;  $\gamma = -1\text{Гц}$ . Первый класс стационарных решений может существовать и устойчив при параметрах, соответствующих заштрихованным областям. Как видно из рис. 4.7а–б, при малых значениях коэффициента  $\mu$  не выполняются условия устойчивости первого класса решений, а при больших  $\mu$  – условия существования всех стационарных режимов. Этот факт следует учитывать при повышении устойчивости системы путем увеличения сопротивления среды.

## 4.5 Выводы по главе

Таким образом, в настоящей главе построены новые математические модели плоских маятников при идеальном и неидеальном возбуждении точки подвеса, в которых учтено влияние различных факторов запаздывания. Построенные модели представляют собой нелинейные системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом как запаздывающего, так и нейтрального типа.

Анализ построенных математических моделей позволил установить, что

при идеальном возбуждении, в нерезонансном случае, в пространстве параметров рассматриваемых систем возможно локализовать области, в которых запаздывание импульса источника возбуждения оказывает определяющее влияние на существование и устойчивость положений равновесия маятника. В этих областях наличие запаздывания импульса источника возбуждения позволяет стабилизировать неустойчивые, при отсутствии запаздывания, положения равновесия и, наоборот, дестабилизировать устойчивые, при отсутствии запаздывания, положения равновесия. Запаздывание импульса источника возбуждения существенно меняет расположение "промежуточных" положений равновесия маятника и играет решающую роль в их устойчивости.

В резонансном случае наличие запаздывания импульса источника возбуждения, запаздывания эффективной восстанавливающей силы и запаздывания реакции среды приводят к появлению новых положений равновесия и являются определяющими факторами при стабилизации колебаний маятника около нижнего положения равновесия. В частности, при некоторых значениях запаздывания колебания маятника около нижнего положения равновесия всегда будут неустойчивыми.

В свою очередь, при неидеальном возбуждении точки подвеса установлено, что благодаря наличию различных факторов запаздывания в системе "маятник – электродвигатель ограниченной мощности" значительно увеличивается число стационарных решений соответствующих систем уравнений, что приводит к увеличению установившихся режимов взаимодействия между маятником и электродвигателем. Факторы запаздывания играют роль энергетического регулятора процесса взаимодействия в системе, меняя фазы динамических характеристик процесса. Возможно появление установившихся режимов взаимодействия, при которых скорость вращения вала двигателя достигает значений, превышающих скорость вращения вала без колебательной нагрузки. В некоторых областях в пространстве параметров рассмотренных систем запаздывание фактически играет роль управляющего воз-

действия при стабилизации колебаний маятника. Благодаря запаздыванию оказывается возможной как стабилизация неустойчивых, при отсутствии запаздывания, положений равновесия, так и дестабилизация – устойчивых.

## Глава 5

# Детерминированный хаос в системе "генератор–пьезокерамический преобразователь (излучатель)"

### 5.1 Введение

Одним из важнейших составных элементов современного навигационного оборудования являются пьезокерамические преобразователи (излучатели). Различные типы таких преобразователей широко используются в глубиномерах, дальномерах, устройствах для сканирования подводного пространства, системах передачи и приема информации под водой. В последнее время в качестве устройства для возбуждения колебаний пьезокерамического преобразователя вновь стали применяться электроламповые LC-генераторы. Это связано с тем ренессансом, который переживают аналоговые ламповые генераторы, позволяющие обеспечить значительно более высокие метрологические характеристики выходных сигналов по сравнению с цифровыми устройствами [110, 112].

Основой для функционирования таких излучателей является эффект связанности механического и электрического полей в пьезокерамических средах [8, 22, 95, 96, 127, 241]. Общая теория, описывающая связанные электроупругие процессы, разработана для различных типов пьезокерамических

преобразователей в работах [8, 22, 95, 96, 241]. Однако практически во всех публикациях задачи о поведении электроупругих тел рассматриваются в, так называемой, идеальной постановке. То есть предполагается, что пьезокерамическое тело находится под действием силовых и энергетических воздействий заданного вида. В такой постановке вопрос о влиянии пьезокерамического тела на устройство возбуждения колебаний, например генератор напряжения, не изучается. В ряде случаев, когда мощность создающего генератора значительно превышает мощность потребляемую пьезокерамическим телом, такая идеализация является допустимой. В то же время на практике очень часто встречаются случаи, когда мощность создающего электрогенератора сравнима с мощностью потребляемой пьезокерамическим телом. В таких случаях применение различных "идеальных" моделей может привести к грубым ошибкам в описании динамики совокупной системы "генератор–пьезокерамический преобразователь". В частности, может быть полностью утрачена информация о реально существующих в системе детерминированных хаотических режимах.

Данная глава посвящена анализу нелинейного взаимодействия стержневого пьезокерамического преобразователя, возбуждаемого  $LC$ -генератором ограниченной мощности. Особое внимание уделяется возможности возникновения хаотических режимов в этой детерминированной динамической системе.

## 5.2 Выбор математической модели

Рассмотрим цилиндрический стержневой пьезокерамический преобразователь, к электродам которого прикладывается электрическое напряжение, возбуждаемое электроламповым  $LC$  - генератором (рис. 5.1). Очевидно, что срединное сечение стержня является прямоугольником. Обозначим ось симметрии стержня через  $Oz$ , причем начало координат  $O$  этой оси будем считать совпадающим с центром симметрии стержня. Как видно из рис. 5.1, поверх-

ности  $S_-$  и  $S_+$  стержня перпендикулярны к его оси  $Oz$ . Предположим, что через эти поверхности происходит излучение звуковых сигналов в жидкость. Обозначим длину стержня через  $2h$ , а площадь его поперечного сечения через  $S$ . Предположим, что стержень поляризован вдоль оси (продольный пьезоэффект). Исследуем продольные колебания стержня.

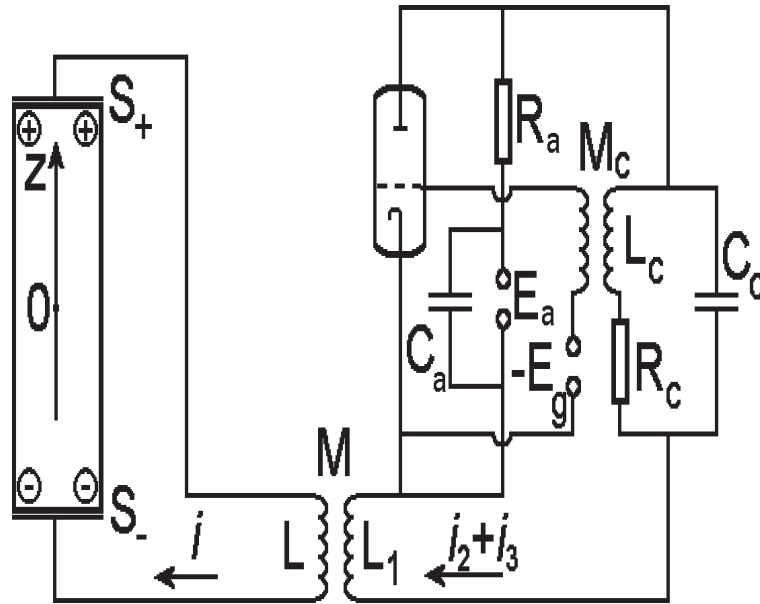


Рис. 5.1: Схема рассматриваемой системы.

В соответствии с теорией продольных деформаций [95, 96] уравнения состояния имеют вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= s_{33}\sigma_z + d_{33}E_z; & D_z &= \epsilon_{33}E_z + d_{33}\sigma_z; \\ \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 0; & E_z &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $\epsilon_z$  - продольная деформация;  $\sigma_z$  - механическое напряжение;  $E_z$  - напряженность электрического поля;  $D_z$  - индукция поля;  $s_{33}$  - упругая податливость;  $d_{33}$  - пьезоэлектрическая постоянная;  $\epsilon_{33}$  - диэлектрическая проницаемость;  $\Psi$  - электрический потенциал .

Уравнения (5.1) дополним соотношением Коши и уравнением колебаний стержня

$$\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5.2)$$



где  $u = u(z, t)$  - продольные перемещения стержня,  $\rho$  - его плотность.

Обозначим импеданс среды, в которой колеблется стержень через  $\eta_0$ . Тогда граничные условия задачи (5.1)–(5.2) имеют вид:

$$\sigma_z = -\eta_0 \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \Psi = \pm V(t); \quad z = \pm h. \quad (5.3)$$

Здесь  $2V(t)$  - электрическая разность потенциалов на электродах преобразователя, под действием которой в цепи стержня протекает ток

$$i = -\frac{\partial(SD_z)}{\partial t}.$$

Этот ток ( $i$ ) связан с током генератора  $i_2 + i_3$  через трансформаторную связь в соответствии с дифференциальным уравнением [57, 181, 185]:

$$2V + L \frac{di}{dt} = M \frac{d(i_2 + i_3)}{dt}. \quad (5.4)$$

Заметим, что это уравнение в отсутствие стержня имеет вид

$$L \frac{di}{dt} = M \frac{d(i_2 + i_3)}{dt}.$$

Следовательно, наличие стержня изменяет распределение электрического напряжения в цепи. Добавление стержня эквивалентно добавлению некоторой ёмкости. Ток  $i$  в цепи с преобразователем отличается от тока в цепи без него. Предположим, что величина тока  $i$  мала и выполняется условие  $2V \gg L \frac{di}{dt}$ . Тогда  $2V \approx M \frac{d(i_2 + i_3)}{dt}$ , то есть напряжение  $2V$  зависит только от тока генератора. Это случай идеального возбуждения преобразователя. Если же величина напряжения  $2V$  сравнима с величиной  $L \frac{di}{dt}$ , то реализуются условия неидеального возбуждения преобразователя. В этом случае ток в цепи преобразователя будет влиять на величину тока в цепи генератора.

Ламповый генератор – это классический пример автоколебательной системы [74]. Как установлено в [38, 40], уравнения Кирхгофа для каждой ветви тока генератора могут быть приведены к одному уравнению относительно новой переменной  $\phi(t)$ , связанной с напряжением на сетке лампы генератора:

$$\phi(t) = \int_0^t (e_g - E_g) dt. \quad (5.5)$$

Это уравнение можно записать в следующем виде [57, 118, 181, 185]:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2\phi = a_1\frac{d\phi}{dt} + a_2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - a_3\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^3 - a_4V(t), \quad (5.6)$$

где

$$a_1 = \frac{M_c}{L_c C_c} \left[ I_1 - \frac{R_c R_a C_c - L_c}{R_a (M_c - D L_c)} + \frac{R_c L_1}{R_a^2 M_c} - 3I_3 (E_g)^2 \right];$$

$$a_2 = 3 \frac{M_c I_3 E_g}{L_c C_c}; \quad a_3 = \frac{M_c I_3}{L_c C_c}; \quad a_4 = \frac{2 M M_c}{L R_a L_c C_c}, \quad (5.7)$$

$I_1, I_3$  – постоянные характеристики мягкого режима работы лампы. Кроме того,

$$\omega_0^2 = \frac{R_a + R_k}{R_a L_k C_k}$$

и  $\omega_0$  является частотой генератора в линейной теории.

Таким образом, функционирование генератора и создание напряжения  $2V(t)$  описываются системой дифференциальных уравнений (5.4)– (5.6), где ток  $i$  зависит от механических деформаций, которые происходят в пьезоке-рамическом стержне.

Для этих деформаций и электрического поля имеем систему уравнений вида:

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{d_{33}(1 - k^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (5.8)$$

где  $c = [\rho s_{33}(1 - k^2)]^{-1/2}$  – скорость продольных сопряженных волн в стержне;  $k = d_{33}(\epsilon_{33}s_{33})^{-1/2}$ .

Продольные колебания стержня будем искать в виде суммы по собственным модам колебаний, а именно [213]

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \mu_i z, \quad (5.9)$$

где  $\mu_i$  является корнем уравнения

$$\mu_i h \cos \mu_i h - k^2 \sin \mu_i h = 0.$$

Для электрического потенциала  $\Psi$  в этом случае мы будем иметь [127]

$$\Psi(z, t) = f(t)z + \frac{k^2}{d_{33}(1 - k^2)} \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \mu_i z. \quad (5.10)$$

Тогда ток  $i$ , протекающий через стержень, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} i &= -\frac{\partial(SD_z)}{\partial t} = S\epsilon_{33}(1-k^2)\dot{f} = \\ &= S\epsilon_{33}\frac{(1-k^2)}{h}[\dot{V} - \frac{k^2}{d_{33}(1-k^2)}\sum_{i=1}^N \dot{f}_i \sin \mu_i h]. \end{aligned}$$

Используя граничные условия (5.3), получаем следующие соотношения для собственных мод колебаний

$$\begin{aligned} -\frac{s_{33}h\eta_0}{d_{33}}\sum_{i=1}^N \dot{f}_i(t) \sin \mu_i h &= V(t); \\ i &= \frac{S\epsilon_{33}(1-k^2)}{h}\dot{V}(t) + \frac{\epsilon_{33}k^2}{h^2\eta_0}V(t). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Подставляя эти выражения в (5.4), находим, что напряжение  $2V(t)$ , прикладываемое на электроды преобразователя, должно быть определено как решение системы уравнений [57, 118, 181, 185]:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \omega_0^2\phi &= a_1\dot{\phi} + a_2\dot{\phi}^2 - a_3\dot{\phi}^3 - a_4V(t), \\ \ddot{V}(t) + \omega_1^2V(t) &= a_5\phi + a_6\dot{\phi} - a_7\dot{V}(t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь

$$\omega_1^2 = \frac{2h}{LS\epsilon_{33}(1-k^2)}; a_5 = -\frac{M\omega_1^2 R_c(R_a + R_c)}{2M_c R_a L_c}; a_6 = -\frac{M\omega_1^2 R_c}{2M_c R_a}; a_7 = \frac{k^2}{\eta_0 h S(1-k^2)}.$$

После нахождения  $V(t)$ , продольные колебания стержня

$$u(t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \mu_i z$$

определяются из уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{d_{33}}{s_{33}h\rho}V(t)\delta(z-h) + \frac{d_{33}}{s_{33}h\rho}V(t)\delta(z+h), \quad (5.13)$$

где  $\delta(z)$  - функция Дирака.

Если пренебречь обратным влиянием колебаний преобразователя (механических и электрических) на функционирование генератора ( $a_4 = 0$ ), то

система уравнений (5.12) распадается на два уравнения, каждое из которых имеет размерность фазового пространства равную двум. Первое из них является автоколебательным и может быть решено независимо от второго. Второе уравнение, описывающее колебательные процессы в стержне, является линейным. В этом случае возможные аттракторы системы уравнений (5.12) всегда будут регулярными. Поэтому и функционирование генератора, и излучение волн преобразователем в акустическую среду будут соответствовать регулярным (возможно достаточно сложным) процессам.

Если же  $a_4 \neq 0$ , то размерность фазового пространства системы уравнений (5.12) будет равна четырем. В этом случае в системе могут существовать как регулярные, так и хаотические аттракторы [62, 74]. Таким образом, принципиальная возможность существования хаотических режимов в генераторе и возбуждения хаотических волн в акустической среде обусловлена исключительно взаимодействием между преобразователем и генератором.

### 5.3 Исследование установившихся режимов взаимодействия

Введем в системе (5.12) новые безразмерные переменные

$$\xi = \frac{\phi\omega_0}{E_g}; \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \zeta; \quad \beta = \frac{V}{E_g}; \quad \frac{d\beta}{d\tau} = \gamma; \quad \tau = \omega_0 t. \quad (5.14)$$

Тогда система уравнений (5.12) запишется в виде [57, 110, 118, 181, 185]:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \zeta, \\ \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\xi + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 - \alpha_3\zeta^3 + \alpha_4\beta, \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= \gamma, \\ \frac{d\gamma}{d\tau} &= \alpha_5\xi + \alpha_6\zeta - \alpha_0\beta - \alpha_7\gamma, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где коэффициенты равны

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}; & \alpha_1 &= \frac{a_0}{\omega_0}; & \alpha_2 &= \frac{a_2 E_g}{\omega_0}; & \alpha_3 &= \frac{a_3 E_g^2}{\omega_0}; \\ \alpha_4 &= -\frac{a_4}{\omega_0}; & \alpha_5 &= \frac{a_5}{\omega_0^3}; & \alpha_6 &= \frac{a_6}{\omega_0^2}; & \alpha_7 &= \frac{a_7}{\omega_0}.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Первоначально исследуем положения равновесия системы (5.15). Все они определяются как решения нелинейной алгебраической системы уравнений

$$\begin{aligned}\zeta &= 0, \\ -\xi + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 - \alpha_3 \zeta^3 + \alpha_4 \beta &= 0, \\ \gamma &= 0, \\ \alpha_5 \xi + \alpha_6 \zeta - \alpha_0 \beta - \alpha_7 \gamma &= 0.\end{aligned}\tag{5.17}$$

При выполнении условия  $\alpha_0 = \alpha_4 \alpha_5$  эта система имеет бесконечное множество решений, которые определяются по формулам

$$\zeta = 0; \quad \xi = \alpha_4 \beta; \quad \gamma = 0; \quad \beta = k,$$

где  $k$  – произвольное действительное число, не равное нулю. При выполнении условия

$$\alpha_0 \neq \alpha_4 \alpha_5 \tag{5.18}$$

система (5.17) имеет единственное тривиальное решение  $\xi = 0$ ,  $\zeta = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$ . Этому решению соответствует нулевое положение равновесия, которое при выполнении условия (5.18) будет единственным положением равновесия системы.

В силу критерия Гурвица достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия можно записать в виде [57, 118, 185]:

$$\alpha_7 - \alpha_1 > 0, \tag{5.19}$$

$$1 + \alpha_0 - \alpha_1 \alpha_7 > 0, \tag{5.20}$$

$$\alpha_7 - \alpha_4 \alpha_6 - \alpha_0 \alpha_1 > 0, \tag{5.21}$$

$$\alpha_6 - \alpha_4\alpha_5 > 0, \quad (5.22)$$

$$(\alpha_7 - \alpha_1)(1 + \alpha_0 - \alpha_1\alpha_7)(\alpha_7 - \alpha_4\alpha_6 - \alpha_0\alpha_1) - (\alpha_7 - \alpha_4\alpha_6 - \alpha_0\alpha_1)^2 - \\ - (\alpha_7 - \alpha_1)^2(\alpha_6 - \alpha_4\alpha_5) > 0. \quad (5.23)$$

Таким образом, при выполнении условия (5.18) и не выполнении хотя бы одного из неравенств (5.19)-(5.23) единственное положение равновесия системы (5.15) будет неустойчивым. В этом случае все траектории системы, стартующие из окрестности начала координат фазового пространства, с течением времени покидают эту окрестность и, в силу диссипативности системы, стремятся к некоторым предельным множествам, аттракторам, которые, как будет показано в дальнейшем, могут быть как регулярными, так и хаотическими.

Так как система уравнений (5.15) является нелинейной системой дифференциальных уравнений четвертого порядка, то все ее дальнейшие исследования проводились при помощи численных методов. Детальное описание применяемых методов и алгоритмов приведено в главе 2, а методика проводимых расчетов описана в п.3.2.2.

В пространстве параметров системы (5.15) был проведен большой комплекс численных расчетов, при которых полагалось, что генератор работает, имея следующие параметры:

$$E_g = 700V; E_a = 2000V; I_1 = 6.5 \times 10^{-5} A/V; I_3 = 5.184 \times X \times 10^{-9} A/V^3; \\ D = 0.015; R_a = 160\Omega; R_c = 10\Omega; L_c = 0.094H; \\ C_c = 1.0465mF; M_c = 0.275H; M = 1H; L = 100H. \quad (5.24)$$

Здесь  $X$  является безразмерным переменным множителем, изменение которого меняет характеристики работы лампы генератора.

В таком случае коэффициенты системы (5.15) равны

$$\alpha_0 = 0.995; \alpha_1 = 0.0535; \alpha_2 = 0.63 \times X; \alpha_3 = 0.21 \times X; \alpha_4 = -0.103; \\ \alpha_5 = -0.0604; \alpha_6 = -0.12; \alpha_7 = 0.01. \quad (5.25)$$

Начальные условия варьировались в окрестности начала координат фазового пространства системы уравнений (5.15). Особо подчеркнем, что значения параметров в формулах (5.24)-(5.25) соответствуют реальным характеристикам LC-генераторов и пьезокерамических излучателей [127, 241]. При так выбранных параметрах системы (5.15) у нее существует единственное нулевое положение равновесия, которое является неустойчивым по Ляпунову.

Определим дивергенцию системы (5.15), обозначив ее через  $divF$ . Очевидно, что она может быть найдена по формуле [57, 118, 185]:

$$divF = \alpha_1 + 2\alpha_2\zeta - 3\alpha_3\zeta^2 - \alpha_7. \quad (5.26)$$

Как видно из формулы (5.26), в общем случае дивергенция будет знакопеременной. Учитывая, что параметры системы выбираются в соответствии с формулами (5.25), выражение для дивергенции системы можно записать в виде

$$divF = 0.63X\zeta(2 - \zeta) + 0.0435. \quad (5.27)$$

Если параметр  $X$  будет положительным, то, с точностью до 0.0435, дивергенция системы будет положительной в те моменты времени, когда фазовая переменная  $\zeta$  удовлетворяет неравенству  $2 > \zeta > 0$ . Поэтому, в отличие от систем с постоянной отрицательной дивергенцией, вопрос о локальном изменении с течением времени фазового объема системы вблизи частного решения системы (5.15) требует дополнительного разъяснения. Как известно [5], данный фазовый объем во времени изменяется в соответствие с выражением

$$A(t) = A(t_0)e^{(\overline{divF})t} = A(t_0)e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)t}, \quad (5.28)$$

где  $A(t)$  – фазовый объем,  $\lambda_i$  – ляпуновские характеристические показатели аттрактора, а в выражении  $\overline{divF}$  чертой обозначено усреднение по времени. Как показали проведенные в дальнейшем расчеты, сумма ляпуновских характеристических показателей для всех, приведенных далее в работе, регулярных и хаотических аттракторов системы (5.15) будет отрицательной. Следовательно, отрицательной будет усредненная по времени дивергенция

системы, хотя при некоторых значениях времени она может быть положительной. Это означает, что все аттракторы системы (5.15) имеют нулевые предельные объемы.

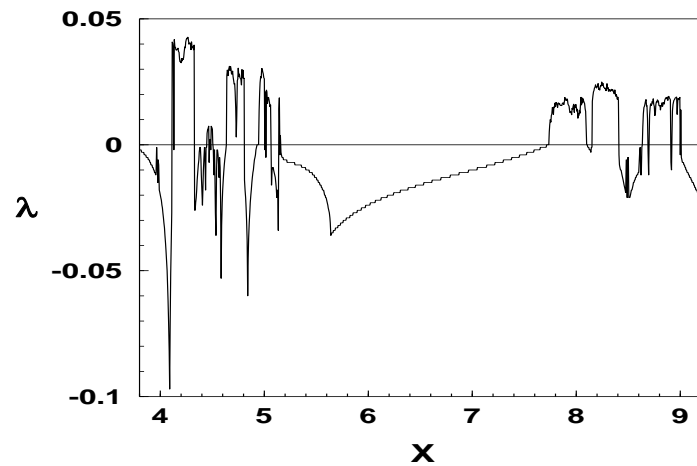


Рис. 5.2: Зависимость старшего ляпуновского характеристического показателя  $\lambda$  от значений параметра  $X$ .

Рассмотрим изменения установившихся динамических режимов, которые имеют место в системе (5.15), при изменении параметра  $X$ . При этом особое внимание уделим возникновению хаотических аттракторов, их подробному описанию и сценариям переходов от регулярных режимов к хаотическим. Как известно, основным практическим критерием существования хаотического аттрактора является наличие в спектре ЛХП хотя бы одного положительного показателя [74, 62]. На рис. 5.2 приведена зависимость старшего, отличного от нуля, ляпуновского характеристического показателя от параметра  $X$  [57, 118, 185]. Как видно из рисунка, существует ряд интервалов значений  $X$ , в которых величина старшего ляпуновского показателя будет положительной. Следовательно, в этих интервалах существуют хаотические аттракторы системы (5.15). Точки пересечения этого графика с горизонтальной координатной осью соответствуют бифуркационным значениям параметра  $X$ .



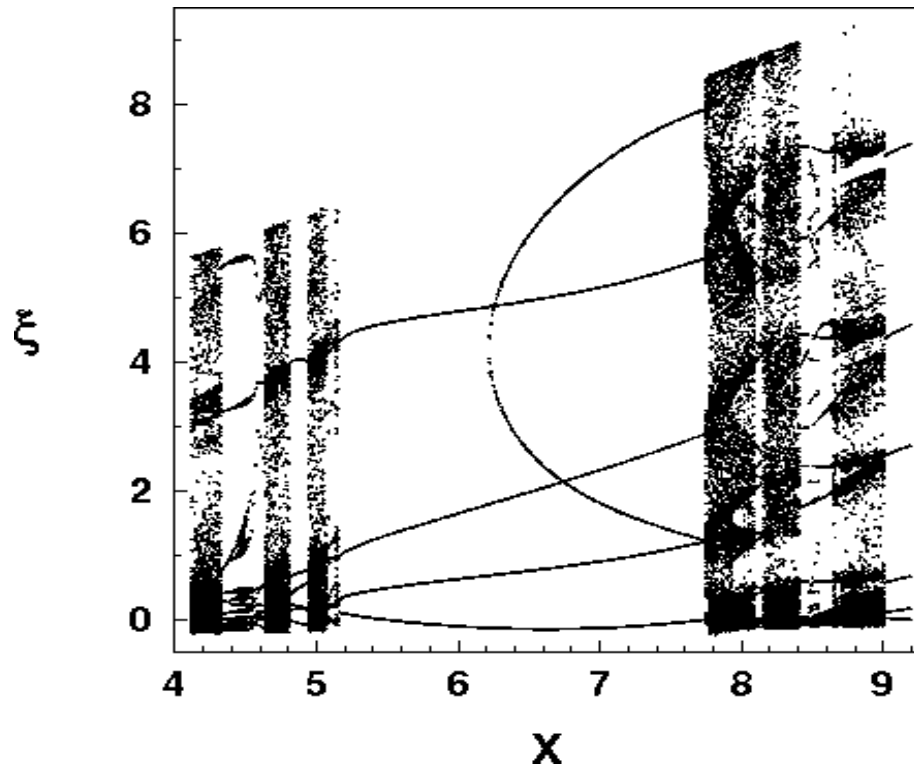


Рис. 5.3: Фазопараметрическая характеристика системы.

На рис. 5.3 приведена фазопараметрическая характеристика системы, так называемое бифуркационное дерево [57, 118, 185]. Эта характеристика построена относительно координаты  $\xi$ . Фазопараметрические характеристики относительно других координат системы качественно подобны приведенной на рис. 5.3. Светлым участкам "кроны" этого дерева соответствуют периодические режимы установившихся колебаний системы (5.15), а густо затемненным – хаотические. Четко видны точки бифуркации при прохождении которых происходит смена регулярного, периодического режима на нерегулярный, хаотический.

Рассмотрим эти смены режимов более детально. При изменении значения параметра  $X$  на сегменте  $9.3 \geq X \geq 9.01$  в системе существует устойчивый предельный цикл, сигнатура спектра ЛХП которого имеет вид ("0", "–", "–", "–"). То есть старший ляпуновский показатель цикла нулевой, а три остальные – отрицательные. Трехмерная проекция фазового портрета этого цикла, его сечение Пуанкаре плоскостью  $\beta = 0$  и распределе-

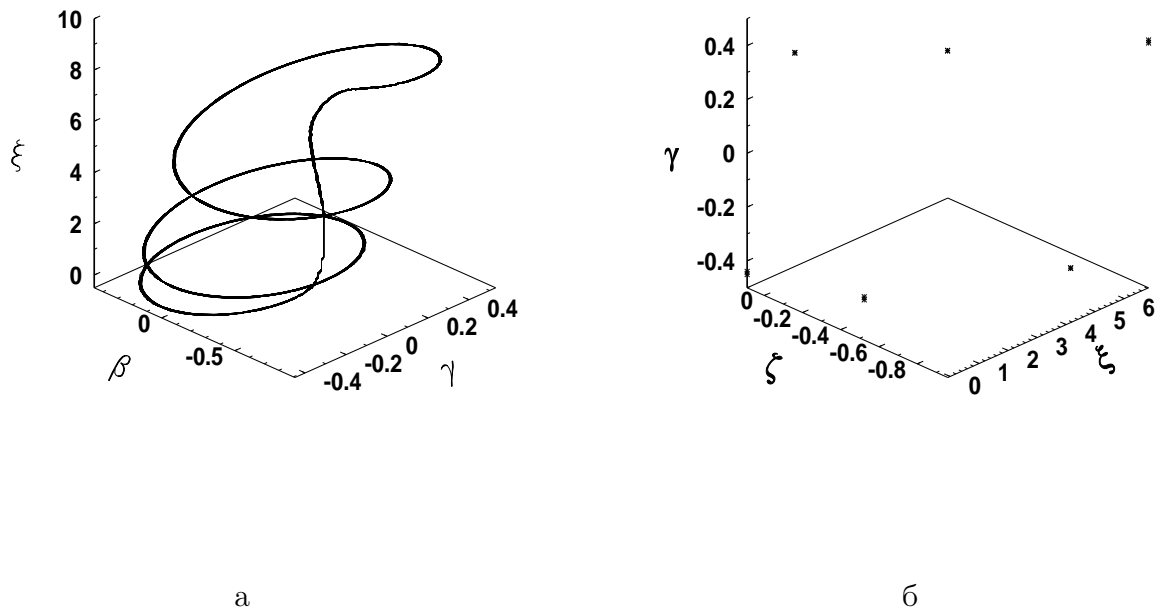


Рис. 5.4: Проекция фазового портрета(а) и сечение Пуанкаре плоскостью  $\beta = 0$ (б) при  $X = 9.01$ .

ние спектральной плотности, построенной в логарифмической шкале, приведены, соответственно, на рис. 5.4.а–б, 5.5.а. Данные рисунки построены при значении  $X = 9.01$ . Как сечение Пуанкаре, так и спектральная плотность имеют структуру типичную для регулярных режимов. Заметим, что фазовые портреты, сечения Пуанкаре и спектральные плотности, построенные при других значениях  $X$  из сегмента  $9.3 \geq X \geq 9.01$ , практически не отличаются от приведенных на рис. 5.4.а–б, 5.5.а. Совпадают также и сигнатуры спектров ЛХП предельных циклов из данного сегмента изменения параметра  $X$ . Сигнал, посылаемый излучателем во внешнюю среду, в этом случае будет периодическим.

При  $X = 9.005$  вместо исчезающего в результате седло-узловой или касательной бифуркации предельного цикла в системе возникает хаотический аттрактор. В сигнатуре спектра ЛХП аттрактора появляется положительный старший показатель и она принимает вид : (“ +”, “0”, “ –”, “ –”). На

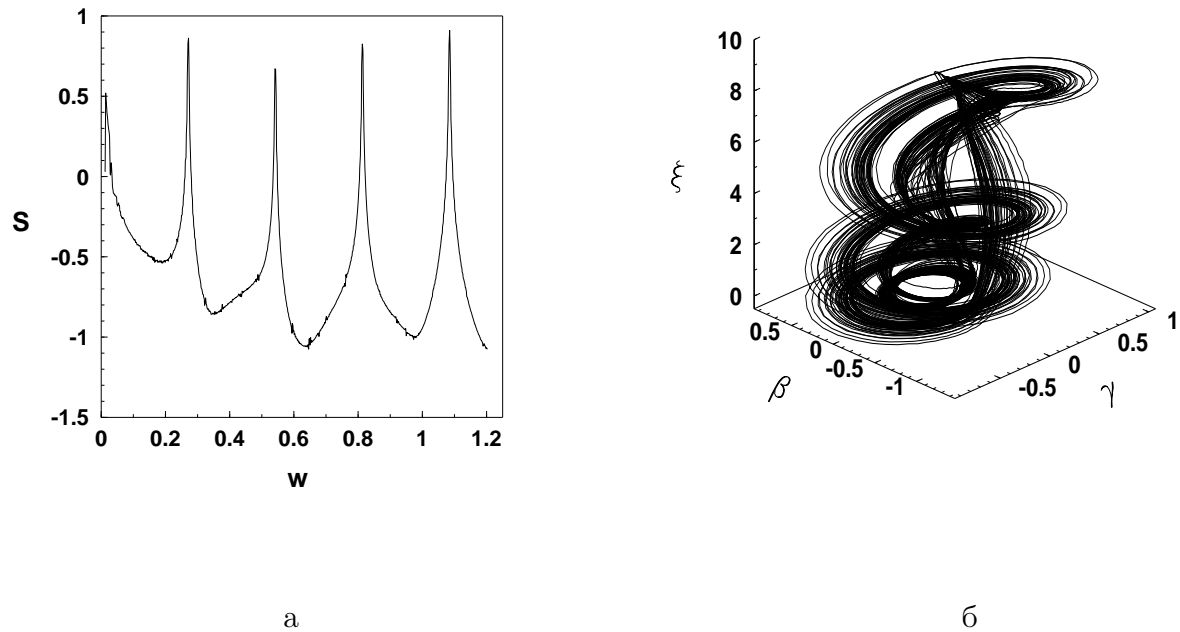


Рис. 5.5: Спектральная плотность при  $X = 9.01(a)$  и проекция фазового портрета при  $X = 8.955(b)$ .

рис. 5.5.б, 5.6.а–б, 5.8.а приведены, соответственно, трехмерная проекция фазового портрета хаотического аттрактора, его сечение и отображение Пуанкаре и распределение спектральной плотности (Фурье–спектр) построенные при значении  $X = 8.955$  [57, 110, 118, 185]. Переход от регулярного аттрактора к хаотическому осуществляется через перемежаемость первого типа по Помо–Манневиллю [140, 190, 191, 211]. Когда мы движемся к точке бифуркации, к устойчивому предельному циклу приближается неустойчивый. В точке бифуркации оба цикла сливаются и исчезают. Траектории системы уходят в отдаленные области фазового пространства. Затем, вследствие того что система (5.15) устойчива по Лагранжу (в силу ее диссипативности) и по Пуассону (так как режим установившийся) и неустойчива по Ляпунову (имеется положительный ляпуновский показатель), происходит процесс реинжекции, то есть возвращения траекторий в область исчезнувшего предельного цикла, затем вновь уход и возвращение и.т.д. Ламинарной фазой этой перемежаемо-

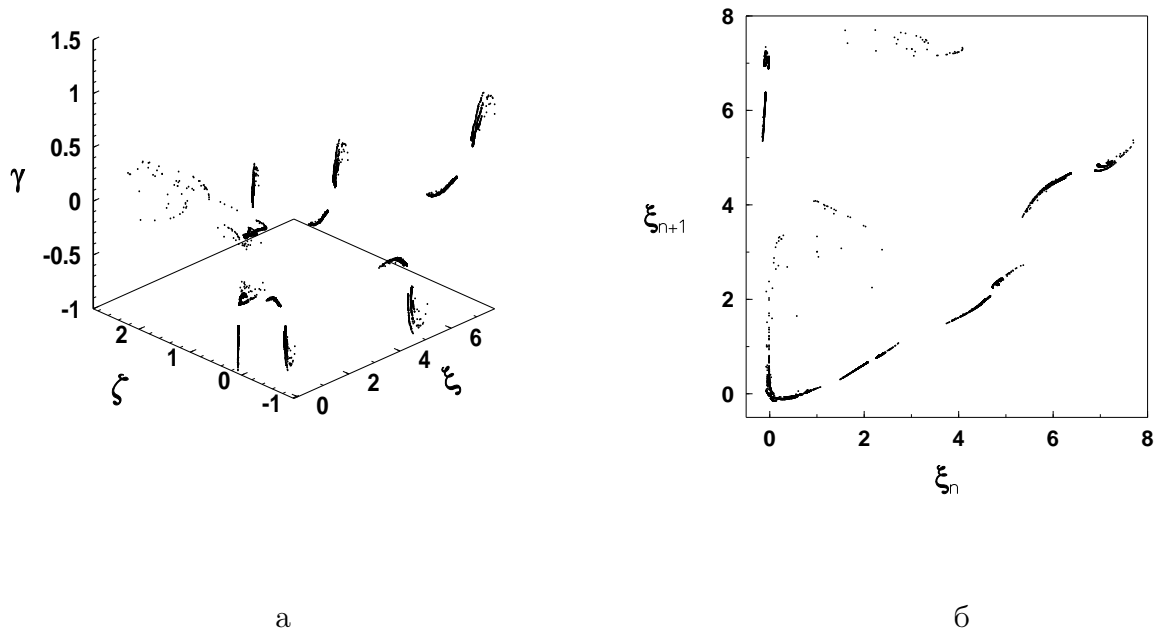
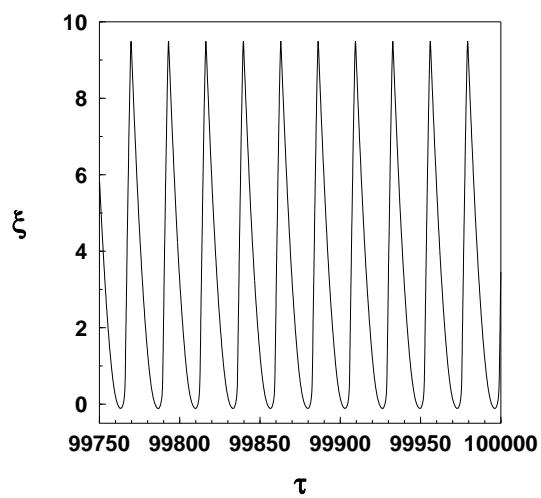


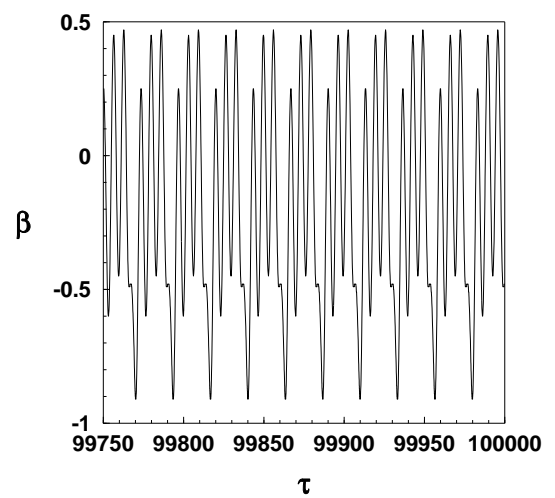
Рис. 5.6: Сечение Пуанкаре плоскостью  $\beta = 0$ (а) и отображение Пуанкаре(б) при  $X = 8.955$ .

сти является движение в достаточно малой окрестности исчезнувшего предельного цикла, а турбулентной - непредсказуемые наперед раскрутки вокруг витков спирали хаотического аттрактора (см. рис. 5.5.б).

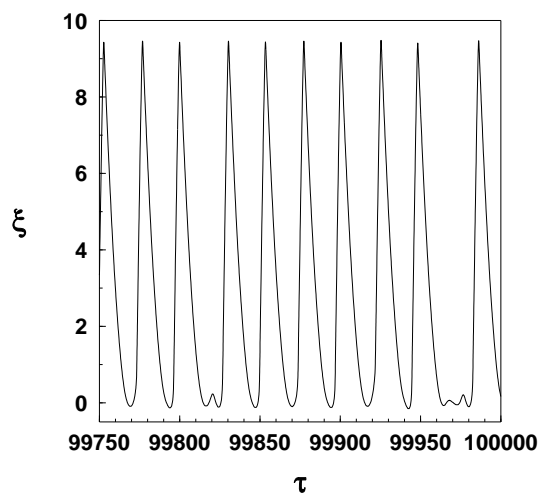
Тип перехода от регулярного режима к хаотическому наглядно виден на временных реализациях фазовых координат. На рис. 5.7 приведены временные реализации по переменным  $\xi$  и  $\beta$ , построенные соответственно при значениях  $X = 9.01$   $X = 8.955$ . На рис. 5.7а-б наблюдаются периодические колебания. В свою очередь, на рис. 5.7в-г отчетливо видны интервалы изменения безразмерного времени  $\tau$ , на которых периодические колебания сменяются близкими к периодическим. Эти интервалы представляют собой ламинарную фазу колебаний. Близкие к периодическим колебания сменяются турбулентными всплесками. Особенно четко наблюдаются два интервала турбулентных всплесков на рис. 5.7в. Время появления турбулентных интервалов, их длительность и число возможных пиков колебаний на турбу-



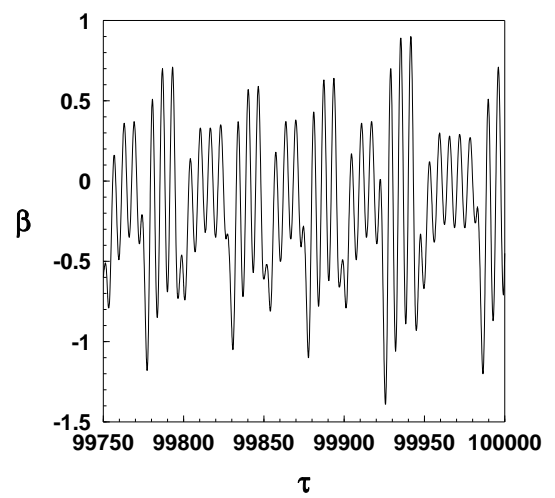
а



б



в



г

Рис. 5.7: Временные реализации при  $X = 9.01$  (а-б) и  $X = 8.955$  (в-г).

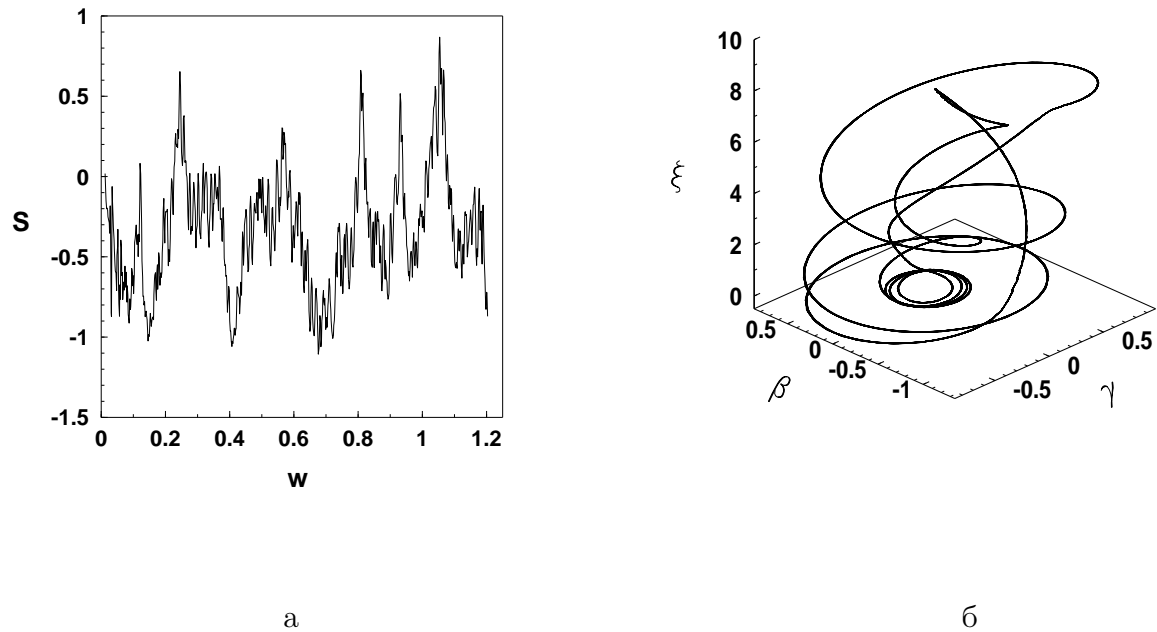


Рис. 5.8: Спектральная плотность при  $X = 8.955(a)$  и проекция фазового портрета при  $X = 8.41(b)$ .

лентных интервалах непредсказуемо. Кроме того, из этих рисунков хорошо видно, что длительность ламинарных фаз аттрактора заметно превосходит длительность турбулентных фаз. Заметим, что о переходе к хаосу через перемежаемость свидетельствует также структура бифуркационного дерева в окрестности точки  $X = 9.01$ .

Сечение и отображение Пуанкаре представляют собой некоторые хаотические множества точек, которые группируются внутри нескольких областей, имеющих квазиленточную структуру. Вид отображения Пуанкаре показывает, что система (5.15) может быть, правда достаточно грубо, аппроксимирована при помощи одномерного отображения, что существенно упростит ее исследование. Вид этого отображения, которое может быть заменено набором параболических и подковообразных линий, является еще одним доказательством того, что система находится в хаотическом режиме [62]. Спектр аттрактора сплошной, но с достаточно четко просматривающимися пиками.

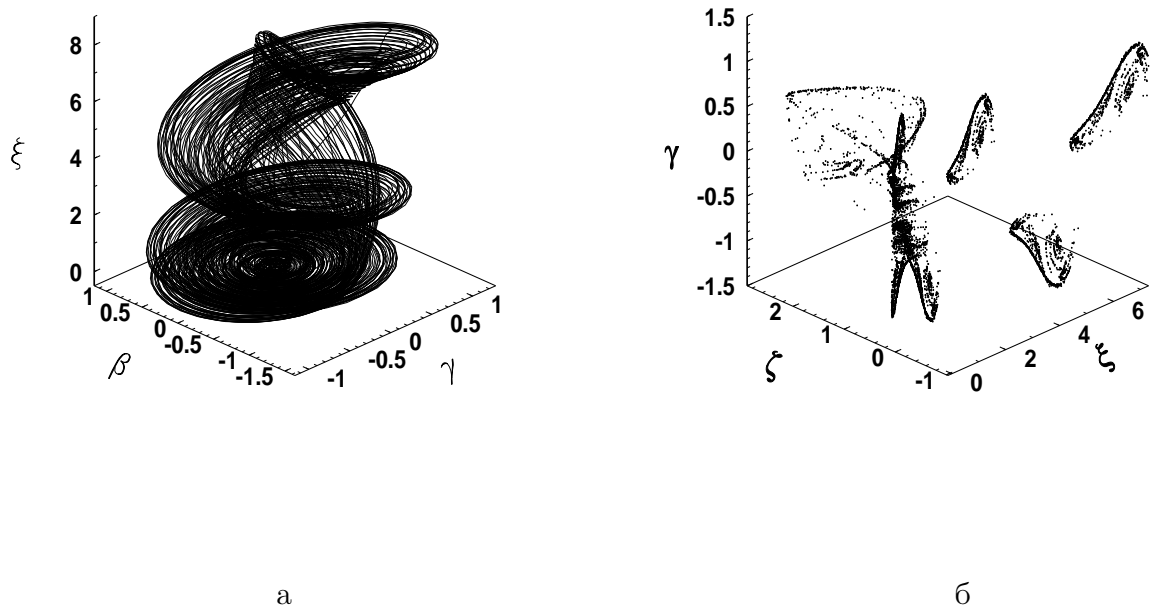


Рис. 5.9: Проекция фазового портрета (а) и сечение Пуанкаре плоскостью  $\beta = 0$  (б) при  $X = 8.25$ .

Непрерывность Фурье–спектра также свидетельствует о хаотичности данного аттрактора. Хаотические аттракторы такого типа существуют в системе (5.15) при  $9.005 \geq X \geq 8.645$ . Сигнал, генерируемый излучателем во внешнюю среду, при таких значениях  $X$  будет хаотическим.

Далее остановимся еще на нескольких типах аттракторов, существующих в системе (5.15). При  $8.645 > X \geq 8.41$  в системе существует устойчивый предельный цикл. Проекция фазового портрета такого цикла приведена на рис. 5.8.б. Этот цикл имеет более сложную структуру, чем цикл, приведенный на рис. 5.4.а. Кроме того, он имеет значительно большую длительность периода, чем цикл, приведенный на рис. 5.4.а. При значении  $X \simeq 8.405$  этот цикл исчезает, вследствие касательной бифуркации, и в системе рождается хаотический аттрактор нового типа, проекция фазового портрета которого, построенная при значении  $X=8.25$ , приведена на рис. 5.9.а [57, 119, 185]. Переход от регулярного аттрактора к хаотическому, как и ранее, осуществляется

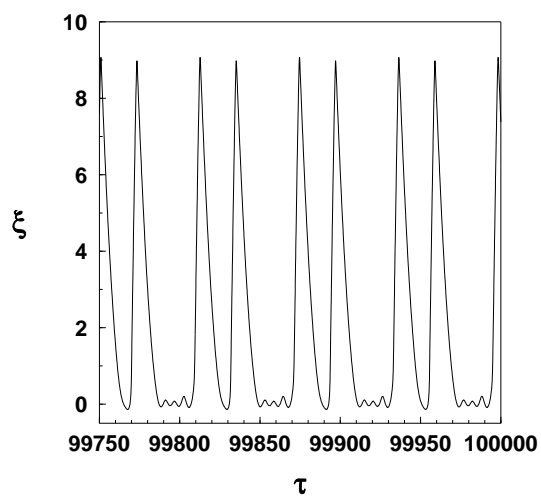
через перемежаемость первого типа по Помо–Манневиллю по выше описанному сценарию. На рис. 5.10 приведены временные реализации по переменным  $\xi$  и  $\beta$ , построенные соответственно при значениях  $X = 8.41$  и  $X = 8.25$ . Здесь наблюдается более частое чередование ламинарной и турбулентной фаз аттрактора (рис. 5.10.в–г) по сравнению с временными реализациями, приведенными на рис. 5.7.в–г. Также наблюдаемый вид турбулентных всплесков приводит к более сплошному покрытию траекториями аттрактора его фазового объема (сравните рис. 5.9.а и рис. 5.5.б). Сигнатура спектра ЛХП данного хаотического аттрактора имеет вид: (“+”, “0”, “–”, “–”).

На рис. 5.9.б [57, 119, 185] приведен вид сечения Пуанкаре данного аттрактора. Оно попрежнему представляет собой хаотическое множество точек, число которых постоянно возрастает с увеличением времени численного интегрирования системы. Однако для этого типа хаотических аттракторов сечение Пуанкаре утрачивает квазиленточную структуру.

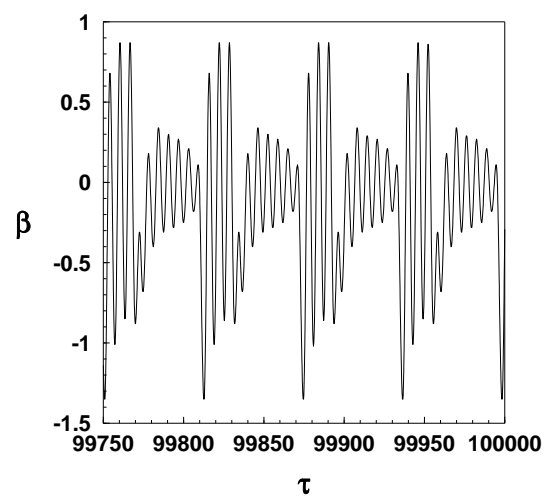
На рис. 5.11.а [57, 185] приведена еще одна важная характеристика хаотических аттракторов – распределение инвариантной меры Крылова–Боголюбова по фазовому портрету аттрактора. Данный рисунок выполнен в так называемой технике кодирования оттенками серого цвета, изложенной в [62]. Инвариантная мера является количественной характеристикой времени пребывания изображающей точки траекторий аттрактора в заданной области фазового объема. Более темные части рисунка соответствуют областям, в которых изображающая точка траекторий проводит большую часть времени. Как видно из рис. 5.11.а, наибольшую часть времени траектории проводят в окрестности исчезнувшего предельного цикла, что является свидетельством большей длительности ламинарных фаз по сравнению с турбулентными. Кроме того, этот рисунок является еще одним подтверждением реализации сценария перемежаемости при переходе от регулярного режима к хаотическому.

При значении  $X = 7.86$  в системе происходит чрезвычайно интересная бифуркация типа “хаос–хаос”, когда в результате сложных механизмов вза-

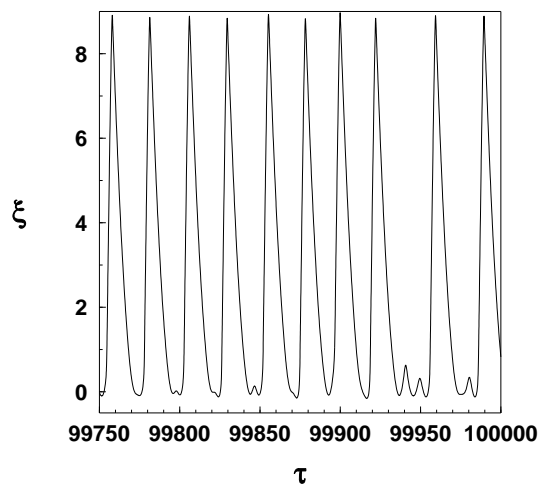




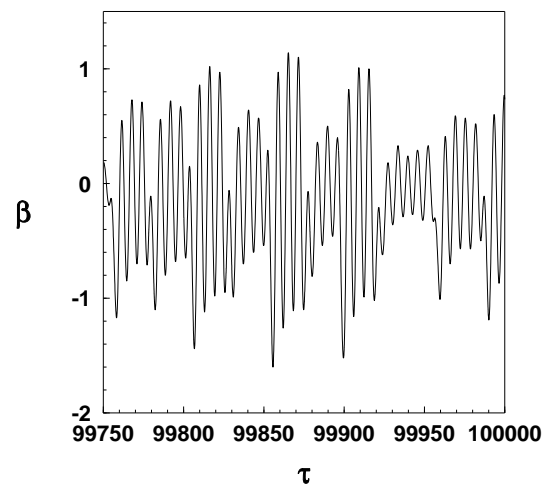
а



б



в



г

Рис. 5.10: Временные реализации при  $X = 8.41(a-b)$  и  $X = 8.25(в-г)$ .

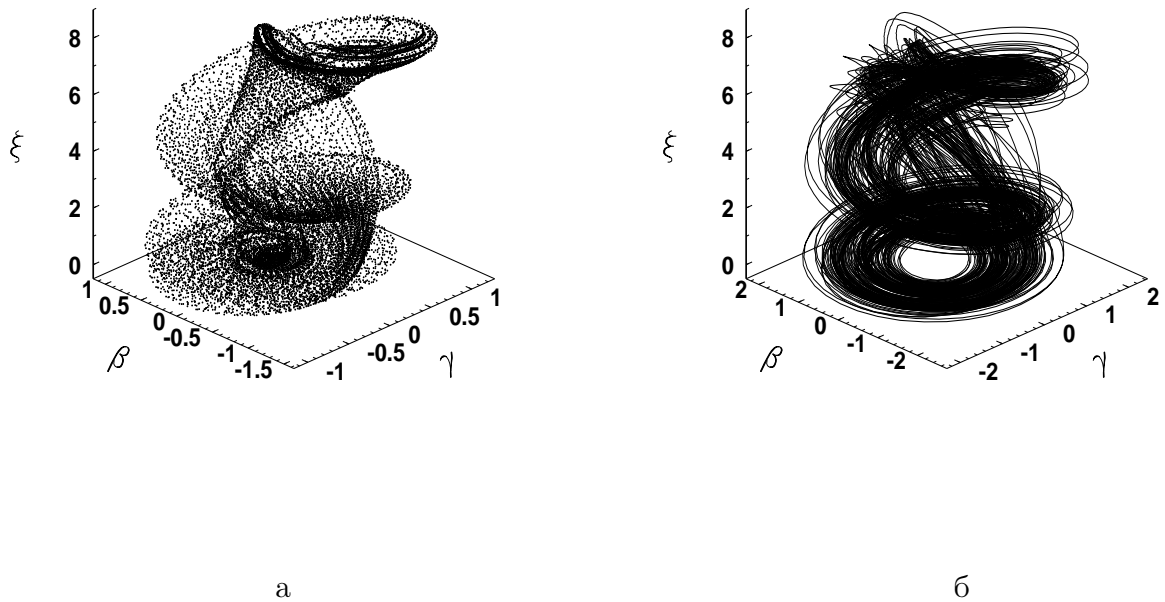


Рис. 5.11: Распределение инвариантной меры при  $X = 8.25$  (а) и проекция фазового портрета при  $X = 7.85$  (б).

имодействия хаотического аттрактора с седловыми предельными циклами, существующими в бассейне его притяжения, в системе (5.15) возникает аттрактор, сигнатура спектра которого имеет вид: (" + ", " + ", "0", " - "). Этот аттрактор имеет два положительных ляпуновских показателя. Такие аттракторы называются гиперхаотическими [62]. Они существуют только в динамических системах, размерность фазового пространства которых более или равна четырем, и характеризуются наличием в спектре ЛХП не менее двух положительных ляпуновских показателей. Наличие двух положительных показателей свидетельствует о существовании в фазовом пространстве двух направлений, по которым разбегаются близкие фазовые траектории аттрактора. У всех ранее рассмотренных хаотических аттракторов существовало только одно направление разбегания близких фазовых траекторий. На рис. 5.11.б приведена проекция фазового портрета гиперхаотического аттрактора, построенного для значения  $X = 7.85$  [57, 119, 185]. Фазовый портрет

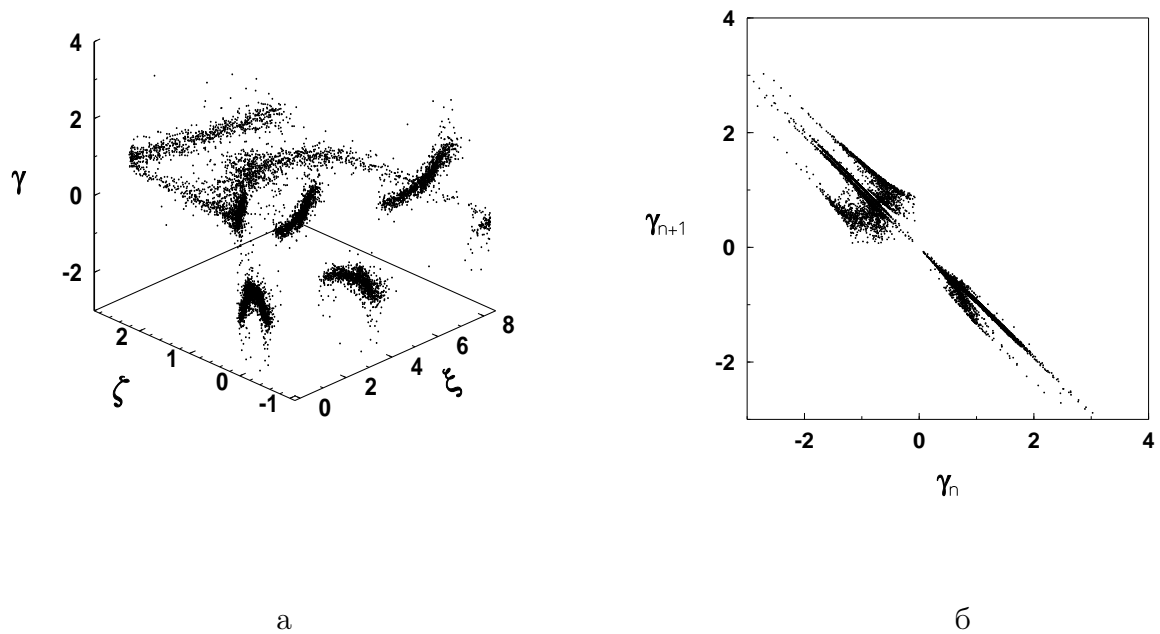


Рис. 5.12: Сечение Пуанкаре плоскостью  $\beta = 0$  (а) и отображение Пуанкаре (б) при  $X = 7.85$ .

такого аттрактора имеет четко просматриваемую "дыру" в нижнем кольце его спиралей.

На рис. 5.12.а–б приведены соответственно сечение и отображение Пуанкаре гиперхаотического аттрактора [57, 119, 185]. Наблюдается еще большее усложнение структуры данных хаотических точечных множеств по сравнению с ранее рассмотренными (рис. 5.6.а–б и рис. 5.9.б). Не может быть и речи об одномерной аппроксимации отображения Пуанкаре. Далее на рис. 5.13.а–б приведены, соответственно, распределение инвариантной меры Крылова–Боголюбова и распределение спектральной плотности гиперхаотического аттрактора. Как видно из рис. 5.13.а, гиперхаотический аттрактор обладает более равномерным распределением инвариантной меры, чем аттрактор, существующий при  $X = 8.25$ . Распределение спектральной плотности гиперхаотического аттрактора по-прежнему сплошное, однако в нем практически исчезают отдельные пики. Гиперхаотические аттракторы существуют в сравнитель-

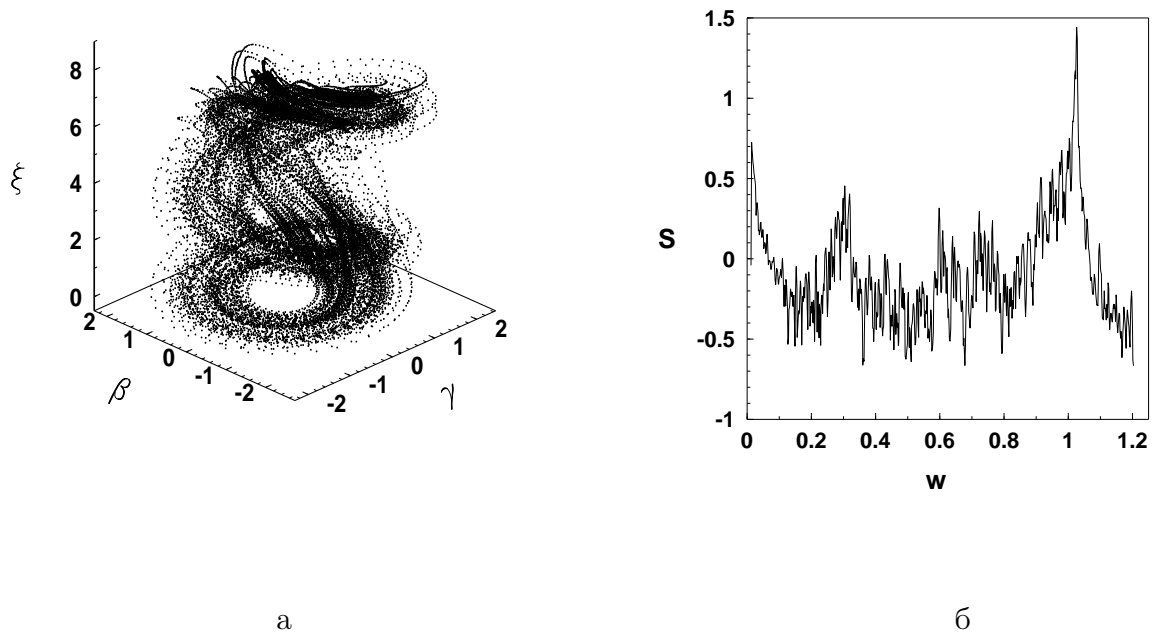


Рис. 5.13: Распределение инвариантной меры(а) и спектральная плотность(б) при  $X = 7.85$ .

но небольшом интервале изменения параметра  $X$ , а именно  $7.86 \geq X \geq 7.745$ . При дальнейшем уменьшении  $X$  они исчезают и в системе вновь возникает устойчивый предельный цикл.

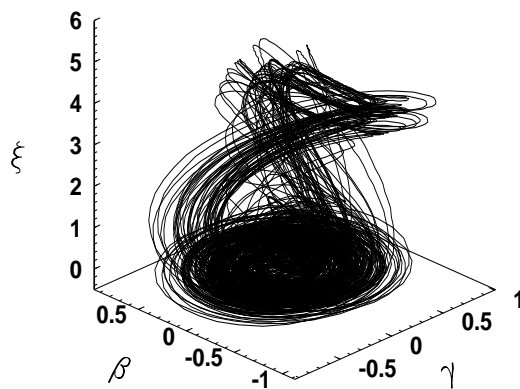
Как видно из рис. 5.2, существует еще несколько интервалов изменения параметра  $X$ , в которых у системы (5.15) существуют хаотические аттракторы. Дальнейшие исследования позволили проследить еще несколько переходов от регулярных движений к хаотическим через перемежаемость. Кроме того, были обнаружены переходы к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [151, 152, 153].

Остановимся еще на одном типе хаотического аттрактора, обнаруженного в системе (5.15). Аттракторы такого типа существуют в системе при  $4.325 \geq X \geq 4.112$ . Здесь переход от регулярного режима к хаотическому при уменьшении параметра  $X$ , то есть с левой стороны данного интервала хаотичности, осуществляется, как и в нескольких ранее рассмотренных слу-

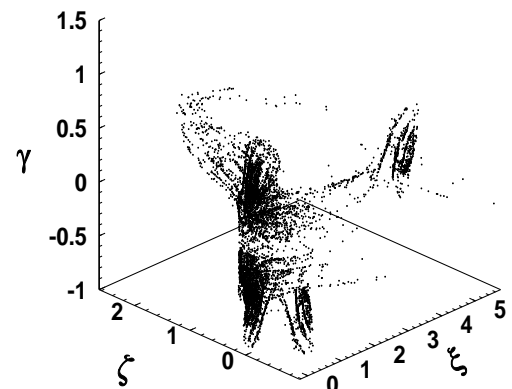
чаях, по сценарию перемежаемости первого типа. Сигнатура спектра ЛХП таких аттракторов имеет вид : (" + ", "0", " - ", " - "). На рис. 5.14.а–б, 5.15.а–б приведены, соответственно, построенные при значении  $X = 4.255$  трехмерная проекция фазового портрета аттрактора, его сечение Пуанкаре плоскостью  $\beta = 0$ , отображение Пуанкаре и распределение спектральной плотности [57, 119, 185]. Как видно из этих рисунков, заметно изменился фазовый портрет хаотического аттрактора, на котором произошло слияние колец его спиралей. Уменьшились амплитуды колебаний фазовых переменных и, следовательно, занимаемый аттрактором фазовый объем. В то же время, как видно из рис. 5.2, старший ляпуновский характеристический показатель для этого аттрактора приблизительно в два раза превышает по величине соответствующие показатели ранее рассмотренных хаотических аттракторов. Это свидетельствует о значительно большей скорости разбегания близких фазовых траекторий. Значительно изменилось расположение точек в сечении Пуанкаре, хотя оно по прежнему является некоторым хаотическим множеством точек. Отображение Пуанкаре по координате  $\xi$  отдаленно напоминает соответствующее отображение, приведенное на рис. 5.6.б. Однако расположение точек отображения, приведенного на рис. 5.15.а, свидетельствует о невозможности какой-либо одномерной аппроксимации в данном случае. Фурье–спектр аттрактора (рис. 5.15.б) имеет сплошную структуру и характеризуется отсутствием пиков.

При уменьшении параметра  $X$  происходит увеличение длительности турбулентных фаз хаотического аттрактора. При  $X = 4.111$  хаотический аттрактор исчезает и в системе рождается предельный цикл, который локализуется в области значительно меньшего фазового объема, чем фазовый объем области локализации исчезнувшего хаотического аттрактора. Временные реализации фазовых переменных при таком переходе "хаотический аттрактор–предельный цикл" приведены на рис. 5.16. Таким образом, имеет место жесткое рождение предельного цикла из хаотического аттрактора.

Наконец, покажем, что в системе возможен переход к хаосу через кас-

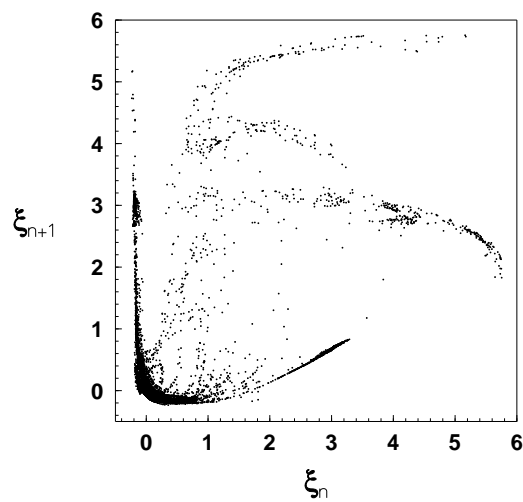


а

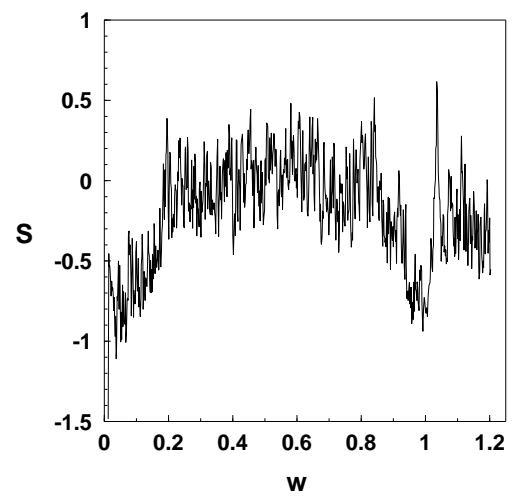


б

Рис. 5.14: Проекция фазового портрета(а) и сечение Пуанкаре плоскостью  $\beta = 0$ (б) при  $X = 4.255$ .

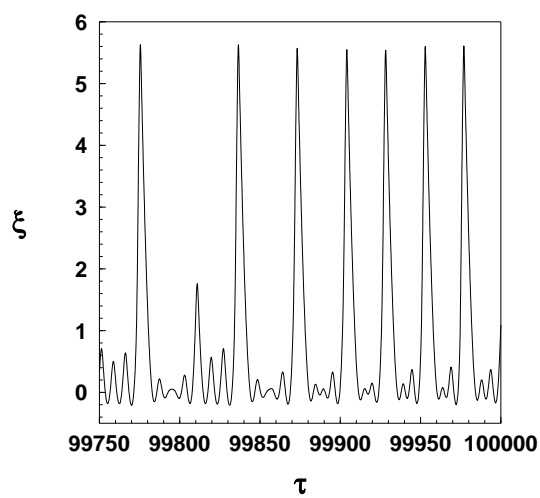


а

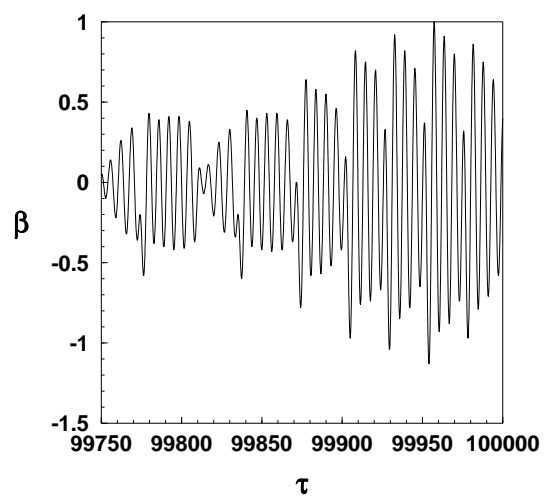


б

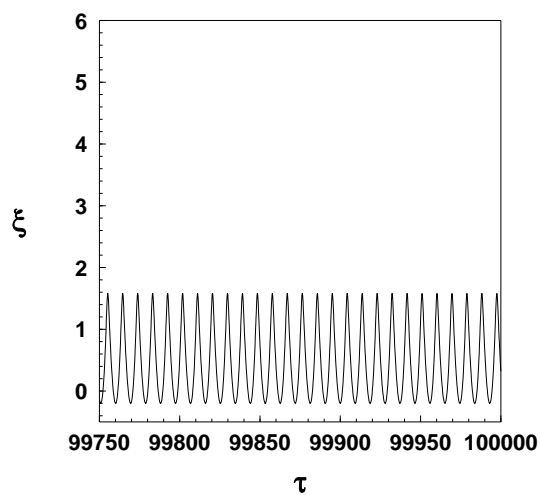
Рис. 5.15: отображение Пуанкаре(а) и спектральная плотность(б) при  $X = 4.255$ .



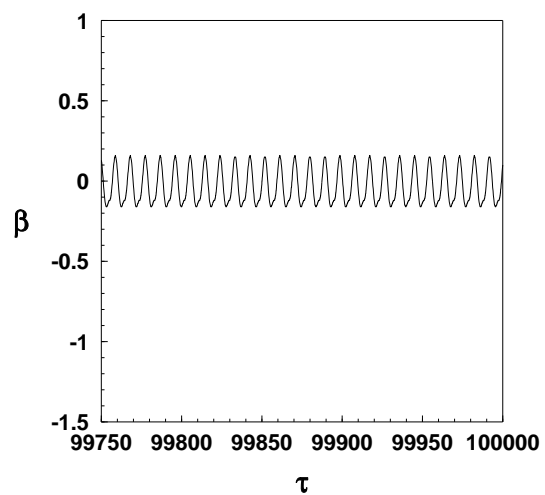
а



б



в



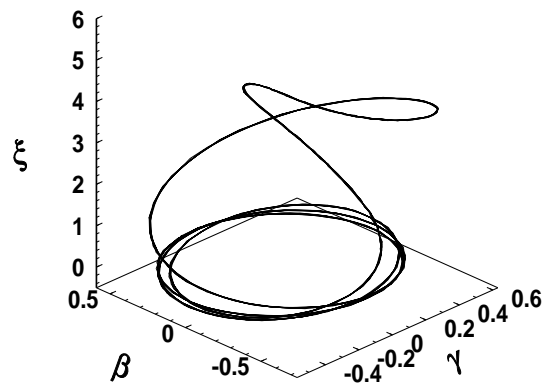
г

Рис. 5.16: Временные реализации при  $X = 4.12(a-b)$  и  $X = 4.11(b-z)$ .

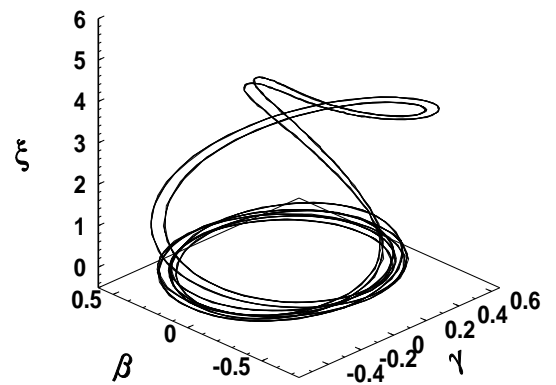
кад бифуркаций удвоения периода в соответствии со сценарием Фейгенбаума. При  $X = 4.33$  в системе возникает устойчивый предельный цикл. Далее, при возрастании значений  $X$  начинается бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода цикла, который заканчивается возникновением хаотического аттрактора при  $X \approx 4.45$ . На рис. 5.17.а–в приведены начальный цикл и две первые бифуркации удвоения его периода. Соответственно на рис. 5.17.г показан возникший в результате этого каскада хаотический аттрактор. Данный хаотический аттрактор имеет в спектре ЛХП один положительный показатель. Причем этот показатель приблизительно в восемь раз меньше, чем максимально возможные характеристические показатели у существующих в системе хаотических аттракторов. То есть у него существенно меньшая скорость разбегания близких фазовых траекторий. Сечение и отображение Пуанкаре у этого типа аттракторов имеет квазиленточную структуру.

Значительный интерес вызывает сравнительный анализ поведения системы "генератор–пьзокерамический преобразователь" в случае идеального возбуждения, когда мы пренебрегаем влиянием излучателя на функционирование генератора. Этому случаю соответствует равенство нулю коэффициента  $\alpha_4$  в системе уравнений (5.15). На рис. 5.18.а–б приведены фазовые портреты аттракторов системы (5.15), построенные при  $\alpha_4 = 0$ ,  $X = 8.25$  (рис. 5.18.а) и  $\alpha_4 = 0$ ,  $X = 7.85$  (рис. 5.18.б). В обоих случаях аттракторы системы являются предельными циклами. В то время как при учете неидеальности возбуждения, которая всегда имеет место в силу закона сохранения энергии, система будет находиться в хаотическом (при  $X = 8.25$ ) или в гиперхаотическом (при  $X = 7.85$ ) режимах. Кроме того, случай идеального возбуждения характеризуется заметным уменьшением амплитуд колебаний фазовых переменных, особенно по переменным  $\beta$ ,  $\gamma$ , которые описывают колебания излучателя. Таким образом, пренебрежение неидеальностью возбуждения приводит к значительным ошибкам в описании процесса взаимодействия излучателя и генератора как количественным, так и, что является более существенным, качественным. Например, вместо ожидаемого перио-

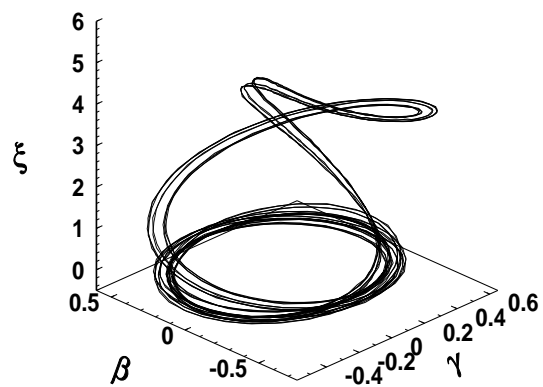




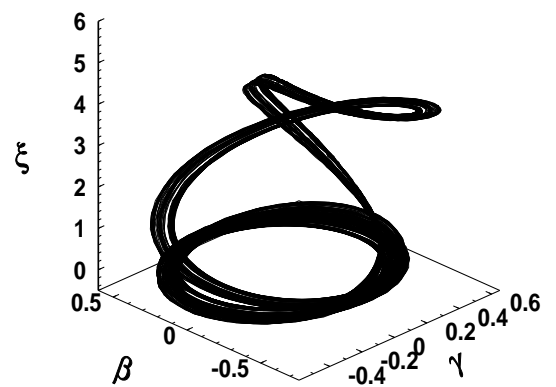
а



б



в



г

Рис. 5.17: Проекция фазового портрета при  $X = 4.38(a)$ ,  $X = 4.425(b)$ ,  $X = 4.44(в)$  и  $X = 4.465(г)$ .

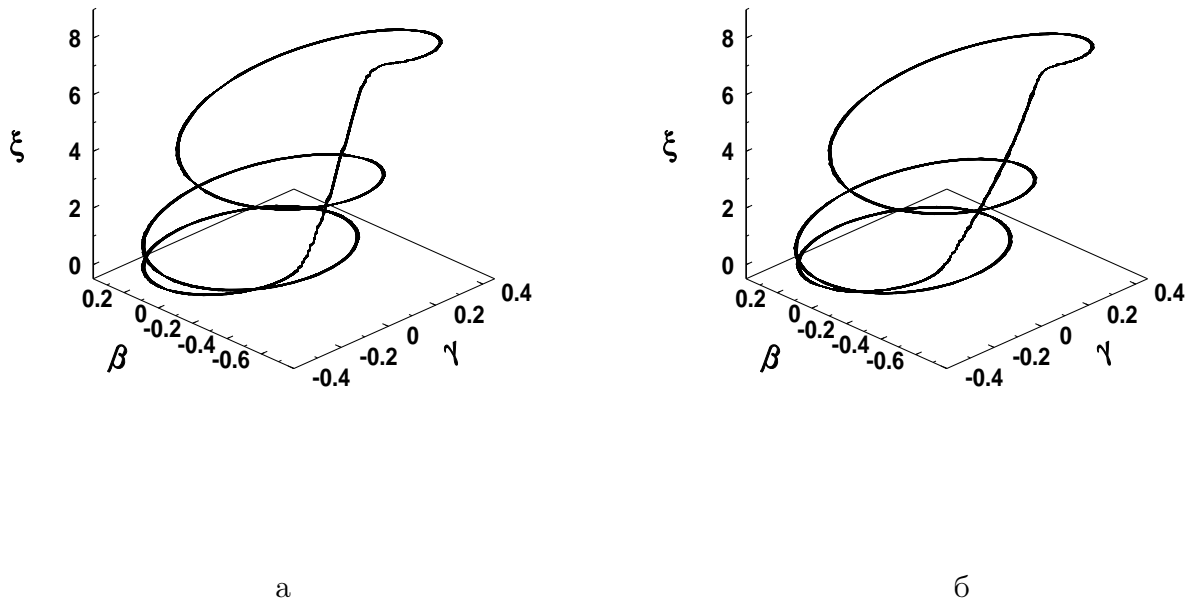


Рис. 5.18: Проекция фазового портрета при  $X = 8.25$ ,  $\alpha_4 = 0$ (а) и проекция фазового портрета при  $X = 7.85$ ,  $\alpha_4 = 0$ (б).

дического режима взаимодействия система фактически будет находится в гиперхаотическом режиме.

Далее было проведено исследование бифуркаций, имеющих место в системе (5.15) при изменении параметра  $\alpha_4$ , который, как только что было отмечено, характеризует взаимосвязь между излучателем и генератором. Как следует из формул (5.7), (5.16) величина этого параметра зависит от значений  $M$ ,  $M_c$ ,  $L$ ,  $R_a$ ,  $L_c$ ,  $C_c$ ,  $\omega_0$ , то есть, фактически, он является мультипараметром. При проведении компьютерных экспериментов значения параметров системы определялись по формулам (5.25) за исключением параметра  $\alpha_4$ , который принимался за бифуркационный и был переменным. Для параметра  $X$  полагалось, что  $X = 7.82$ . Такое значение параметра  $X$  ранее соответствовало случаю гиперхаоса системы.

На рис. 5.19 приведена зависимость старшего, отличного от нуля, ляпуновского характеристического показателя системы  $\lambda$  от значения  $\alpha_4$  [57, 119,

185]. Как видно из рисунка, существуют интервалы изменения  $\alpha_4$ , в которых значения  $\lambda$  будут положительными. В этих интервалах система имеет хаотические аттракторы. При  $\alpha_4 = 0$  у системы (5.15) существует предельный цикл, фазовый портрет которого практически совпадает с фазовым портретом цикла, приведенным на рис. 5.18.б. Однако уже при очень малом уменьшении значения  $\alpha_4$ , а именно при  $\alpha_4 = -0.004$ , старший ляпуновский характеристический показатель системы становится положительным, что свидетельствует о возникновении в системе хаотического аттрактора. Как видим, даже очень малое взаимодействие между подсистемами, генератором и излучателем, приводит к появлению хаоса.

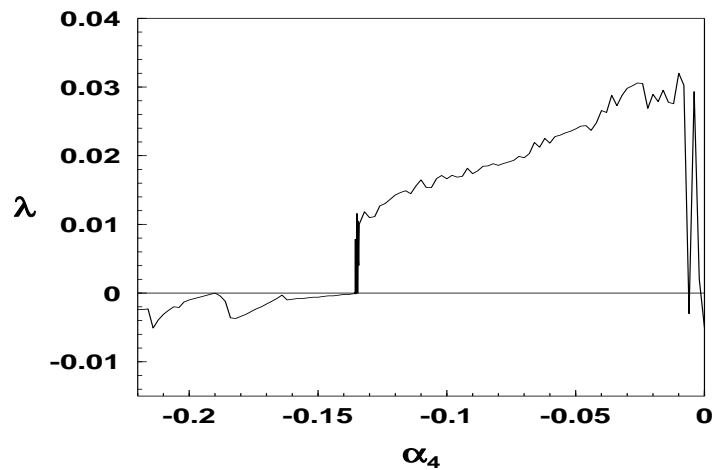


Рис. 5.19: Зависимость старшего ляпуновского характеристического показателя  $\lambda$  от значений параметра  $\alpha_4$ .

Рассмотрим бифуркации, происходящие в системе (5.15) при возрастании параметра  $\alpha_4$ . При  $\alpha_4 = -0.138$  в системе существует устойчивый предельный цикл. Далее, при увеличении значения  $\alpha_4$ , на очень небольшом интервале  $(-0.138, -0.13515)$  в системе происходит каскад бифуркаций удвоения периода, который заканчивается возникновением хаотического аттрактора при  $\alpha_4 = -0.1351$ . Проекция фазового портрета этого аттрактора (для иного, чем у ранее приведенных фазовых портретов, набора фазовых перемен-

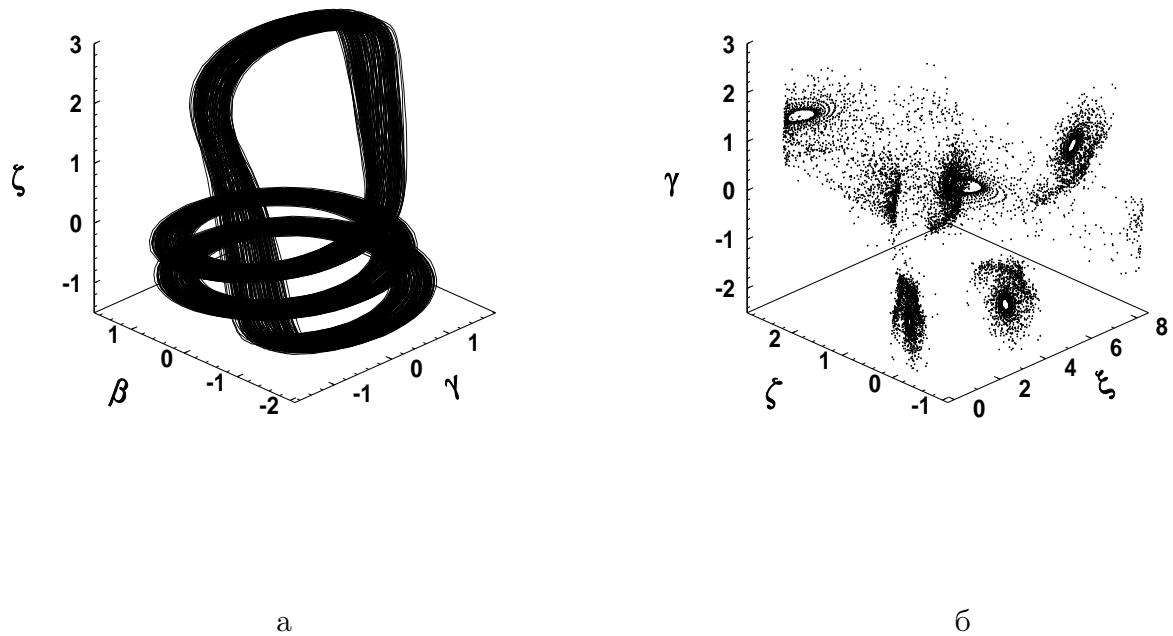
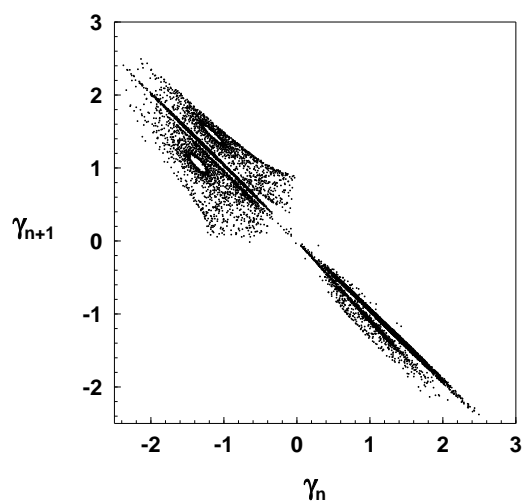


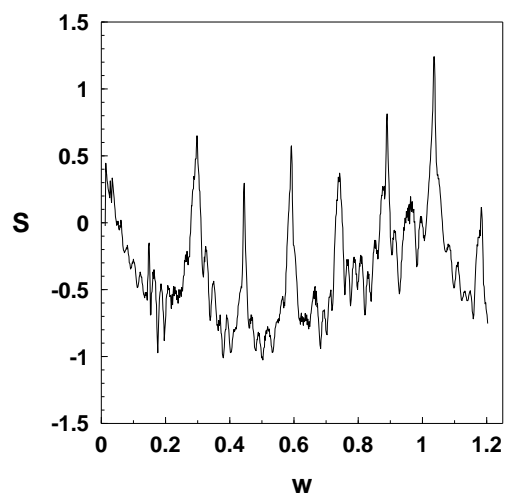
Рис. 5.20: Проекция фазового портрета(а) и сечение Пуанкаре плоскостью  $\beta = 0$ (б) при  $\alpha_4 = -0.135$ .

ных), его сечение и отображение Пуанкаре, а также распределение спектральной плотности, построенные при  $\alpha_4 = -0.135$ , приведены соответственно на рис. 5.20.а–б, 5.21.а–б [57, 119, 185].

Переход от регулярного режима к хаотическому здесь осуществляется в соответствие со сценарием Фейгенбаума [151, 152, 153]. Заметим, что этот аттрактор является гиперхаотическим, так как он имеет два положительных ляпуновских характеристических показателя. Фазовый портрет этого аттрактора заметно отличается от ранее рассмотренного гиперхаотического аттрактора. Что касается сечения и отображения Пуанкаре, то они обладают некоторым качественным подобием с ранее рассмотренным случаем гиперхаоса (рис. 5.12.а–б). Существенными являются отличия и в Фурье–спектре данного аттрактора. Он является сплошным, но в то же время в спектре четко заметны пики – "воспоминания" о гармониках исчезнувших предельных циклов. Данный гиперхаотический аттрактор существует в системе на очень

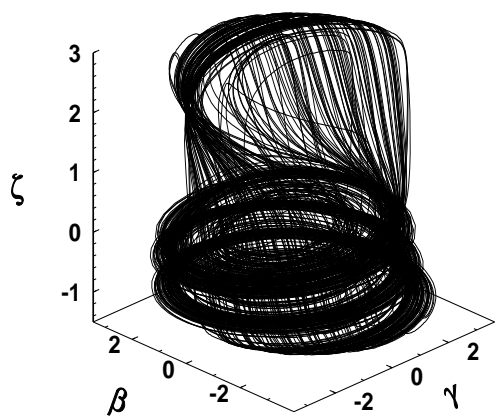


а

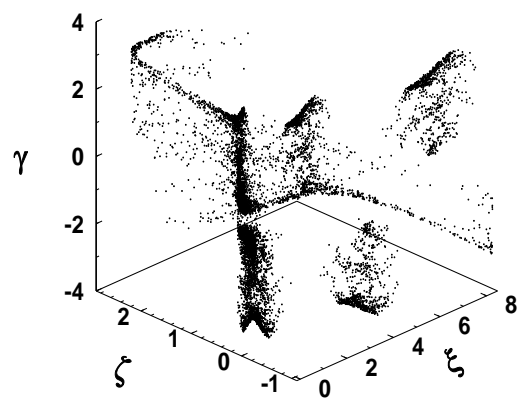


б

Рис. 5.21: Отображение Пуанкаре(а) и спектральная плотность(б) при  $\alpha_4 = -0.135$ .



а



б

Рис. 5.22: Проекция фазового портрета(а) и сечение Пуанкаре плоскостью  $\beta = 0$ (б) при  $\alpha_4 = -0.025$ .

небольшом интервале  $(-0.1351, -0.1348)$  изменения параметра  $\alpha_4$ . Затем в системе имеется "окно периодичности", которое вновь сменяется гиперхаотическим аттрактором при  $\alpha_4 = -0.1344$ . Возникающий аттрактор качественно подобен гиперхаотическому аттрактору, приведенному на рис. 5.11.б. Далее при увеличении значения  $\alpha_4$  наблюдается бифуркация "гиперхаос–хаос" в результате которой, при  $\alpha_4 = -0.058$ , в системе возникает хаотический аттрактор с сигнатурой спектра ЛХП вида: (" +", "0", " –", " –"). На рис. 5.22.а–б приведены, соответственно, проекция фазового портрета и сечение Пуанкаре аттракторов этого типа построенные при значении  $\alpha_4 = -0.025$  [57, 119, 185]. Хаотические аттракторы, подобные приведенному на рис. 5.22, существуют в системе (5.15) при  $-0.058 \leq \alpha_4 \leq -0.004$ . Затем, при  $\alpha_4 > -0.004$ , в системе вновь возникает регулярный аттрактор – предельный цикл.

#### 5.4 Влияние запаздывания на хаотизацию установившихся колебаний

Все ранее проводившиеся исследования не учитывали такой важный фактор, как запаздывание воздействия генератора на излучатель и запаздывание обратного влияния излучателя на генератор. Заметим, что запаздывание всегда присутствует в реальных системах вследствие ограниченности скорости прохождения сигналов: волн сжатия, растяжения, изгиба, силы тока и электрического напряжения, а также многих других факторов. В одних случаях учет запаздывания воздействий не приводит к существенному изменению динамических характеристик исследуемых систем. В других случаях наличие запаздывания приводит не только к значительным количественным изменениям параметров установившихся режимов движения (взаимодействия), а полностью качественно изменяет тип изучаемых движений.

Вновь рассмотрим систему, состоящую из пьезокерамического излу-

чатателя, источником возбуждения которого является электроламповый LC-генератор. Предположим, что в данной системе присутствует постоянное запаздывание сигнала воздействия излучателя на генератор, которое мы обозначим через  $\rho$ . Будем считать, что запаздывание сигнала воздействия генератора на излучатель также равно  $\rho$ . Тогда, система дифференциальных уравнений, описывающая нелинейное взаимодействие системы "пьезокерамический излучатель–генератор", в силу ранее полученных уравнений (5.12), имеет вид [112]:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}(t) + \omega_0^2 \phi(t) &= a_1 \dot{\phi}(t) + a_2 \dot{\phi}^2(t) - a_3 \dot{\phi}^3(t) - a_4 V(t - \rho), \\ \ddot{V}(t) + \omega_1^2 V(t) &= a_5 \phi(t - \rho) + a_6 \dot{\phi}(t) - a_7 \dot{V}(t).\end{aligned}\tag{5.29}$$

Параметры системы уравнений (5.29) были описаны нами ранее при выводе системы уравнений (5.12). Заметим, что запаздывание всегда присутствует в реальных устройствах "генератор–пьезокерамический излучатель", например, в силу территориальной удаленности, иногда достаточно значительной, подсистем указанного устройства. Это приводит к запаздыванию обратных связей одной подсистемы на другую по причинам, изложенным в предыдущем абзаце.

Перейдем в системе уравнений (5.29) к новым безразмерным переменным по формулам:

$$\begin{aligned}\xi(\tau) &= \frac{\phi(\tau)\omega_0}{E_g}, \quad \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = \zeta(\tau), \quad \beta(\tau) = \frac{V(\tau)}{E_g} \\ \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} &= \gamma(\tau), \quad \tau = \omega_0 t.\end{aligned}$$

Тогда получим следующую систему уравнений [112]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} &= \zeta(\tau), \\
\frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} &= -\xi(\tau) + \alpha_1\zeta(\tau) + \alpha_2\zeta^2(\tau) - \alpha_3\zeta^3(\tau) + \alpha_4\beta(\tau - \delta), \\
\frac{d\beta(\tau)}{d\tau} &= \gamma(\tau), \\
\frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} &= -\alpha_0\beta(\tau) + \alpha_5\xi(\tau - \delta) + \alpha_6\zeta(\tau) - \alpha_7\gamma(\tau),
\end{aligned} \tag{5.30}$$

где значения коэффициентов  $\alpha_0$ – $\alpha_7$  определяются по формулам (5.16), а безразмерное запаздывание равно  $\delta = \omega_0\rho$ .

Функция  $\beta(\tau)$  формирует сигнал распространяемый излучателем в акустическую среду, а функция  $\xi(\tau)$  описывает внутренние процессы, протекающие в генераторе. Наличие запаздывания в системе уравнений (5.30) может повлечь за собой как количественные, так и качественные изменения установившихся режимов взаимодействия. При изучении влияния запаздывания на динамику систем в главе 4 мы ограничились исследованием его влияния на устойчивость по Ляпунову стационарных режимов. Однако запаздывание может оказывать более глобальное воздействие на динамику исследуемых систем. Так, запаздывание может изменять сценарии переходов "порядок - хаос" в исследуемой системе, приводить как к появлению новых хаотических аттракторов, так и способствовать исчезновению таких аттракторов, существующих в системе при отсутствии запаздывания. Рассмотрим более детально эти процессы.

Предположим, что запаздывание  $\delta$  является малым и разложим функции системы уравнений (5.30), которые содержат запаздывание, в ряд по степеням  $\delta$ , ограничившись двумя первыми членами такого разложения. Тогда получим

$$\begin{aligned}
\beta(\tau - \delta) &= \beta(\tau) - \delta \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} = \beta(\tau) - \delta\gamma(\tau), \\
\xi(\tau - \delta) &= \xi(\tau) - \delta \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = \xi(\tau) - \delta\zeta(\tau).
\end{aligned} \tag{5.31}$$



Подставляя выражения (5.31) в уравнения (5.30), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} &= \zeta(\tau), \\
 \frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} &= -\xi(\tau) + \alpha_1\zeta(\tau) + \alpha_2\zeta^2(\tau) - \alpha_3\zeta^3(\tau) + \alpha_4(\beta(\tau) - \delta\gamma(\tau)), \\
 \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} &= \gamma(\tau), \\
 \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} &= -\alpha_0\beta(\tau) + \alpha_5(\xi(\tau) - \delta\zeta(\tau)) + \alpha_6\zeta(\tau) - \alpha_7\gamma(\tau).
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

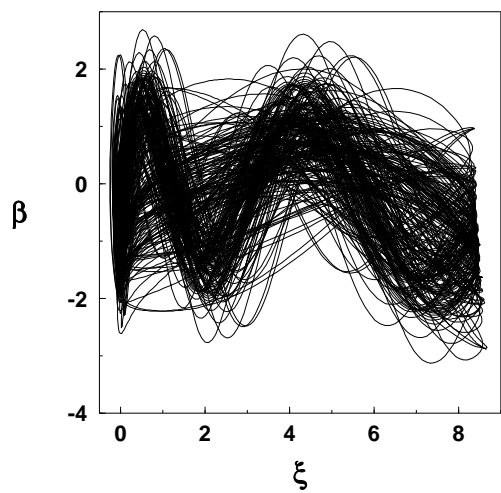
Система уравнений (5.32) по прежнему является нелинейной системой уравнений четвертого порядка, однако запаздывание уже входит в нее как параметр. Обоснование такого подхода детально проведено в [74].

Далее проведем цикл численных экспериментов в пространстве параметров системы (5.32). При этом значения параметров задаются формулами (5.25), а в качестве бифуркационных параметров рассматриваются  $X$  и запаздывание  $\delta$ . Изменение значений запаздывания  $\delta$  позволяет оценить его влияние на установившиеся режимы взаимодействия генератора и излучателя.

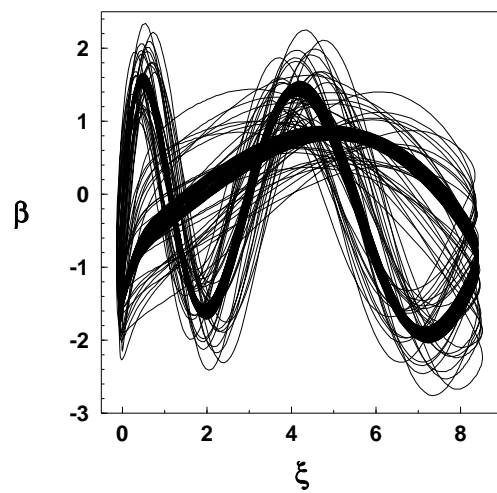
Сперва рассмотрим примеры влияния запаздывания на исчезновение хаотического аттрактора системы уравнений (5.32). Предположим, что  $X = 7.75$ . При таком значении  $X$  и отсутствии запаздывания в системе ( $\delta=0$ ) у нее существует гиперхаотический аттрактор с двумя положительными ляпуновскими характеристическими показателями, которые соответственно равны:  $\lambda_1 = 0.0107$  и  $\lambda_2 = 0.0025$ . Проследим за изменениями фазового портрета этого гиперхаоса, которые наблюдаются при возрастании запаздывания. На рис. 5.23 приведены проекции фазовых портретов аттракторов системы (5.32) на плоскость  $(\xi, \beta)$ , построенные при различных значениях запаздывания [112]. При  $\delta=0.001$  (рис. 5.23.б) начинается уменьшение фазового объема, занимаемого траекториями аттрактора, и наблюдается заметное уменьшение числа его турбулентных всплесков. Аттрактор остается гиперхаоти-

ческим с двумя положительными ляпуновскими характеристическими показателями. При дальнейшем увеличении значения запаздывания продолжает наблюдаться уменьшение фазового объема области локализации аттрактора. При  $\delta=0.005$  (рис. 5.23.в) аттрактор утрачивает структуру, типичную для развитой перемежаемости. Его траектории начинают группироваться внутри некоторой полосы. Аттрактор по-прежнему остается гиперхаотическим, но заметно уменьшаются его ляпуновские показатели, которые соответственно равны  $\lambda_1 = 0.006$  и  $\lambda_2 = 0.0017$ . Далее, при  $\delta=0.007$ , гиперхаотический аттрактор исчезает и в системе рождается устойчивый предельный цикл достаточно простой структуры (рис. 5.23.г). Рис. 5.24 иллюстрирует влияние запаздывания на перестройку структуры аттрактора при  $X = 7.75$ . При увеличении значения  $\delta$  развитое хаотическое точечное множество (рис. 5.24.а–б) сначала несколько упрощает свою структуру (рис. 5.24.в), а затем превращается в множество, состоящее из конечного числа точек (рис. 5.24.г). Развитая хаотическая структура этих сечений для гиперхаотических аттракторов наглядно показывает невозможность одномерной аппроксимации отображений Пуанкаре. При дальнейшем увеличении значений запаздывания хаотические аттракторы в системе (5.32) не обнаружены.

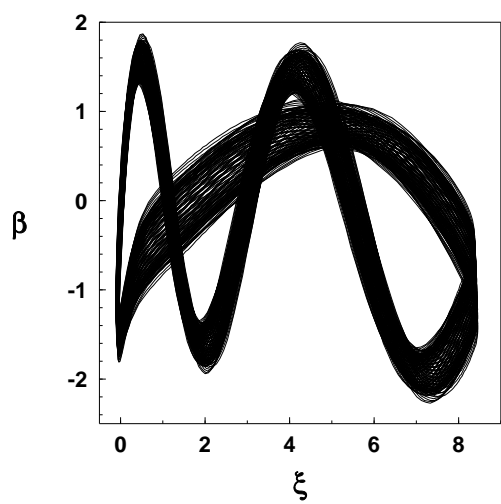
Далее, пусть  $X = 4.25$ , а  $\delta = 0$ . Как установлено в предыдущем параграфе, в этом случае в системе существует хаотический аттрактор иного типа. Он является хаотическим, а не гиперхаотическим, как в предыдущем случае. Фазовый портрет этого хаотического аттрактора заметно отличается от гиперхаотических аттракторов, рассмотренных на рис. 5.23.а–в. Особенно существенно при  $X = 4.25$  возрастает значение старшего ляпуновского показателя ( $\lambda_1 = 0.0407$ ), что свидетельствует о заметном увеличении скорости разбегания близких фазовых траекторий. На рис. 5.25.а приведена проекция фазового портрета аттрактора такого типа, построенная при значении  $\delta = 0$ . При появлении запаздывания в системе аттракторы типа, изображенного на рис. 5.25.а, существуют для значений  $0 \leq \delta < 0.106$ . При  $\delta = 0.106$  хаотический аттрактор разрушается и в системе рождается устойчивый пре-



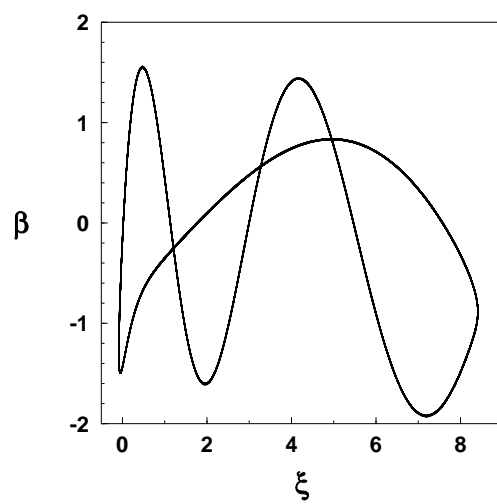
а



б



в



г

Рис. 5.23: Проекция фазового портрета при  $X = 7.75$  и  $\delta = 0$  (а),  $\delta = 0.001$  (б),  $\delta = 0.005$  (в),  $\delta = 0.007$  (г).

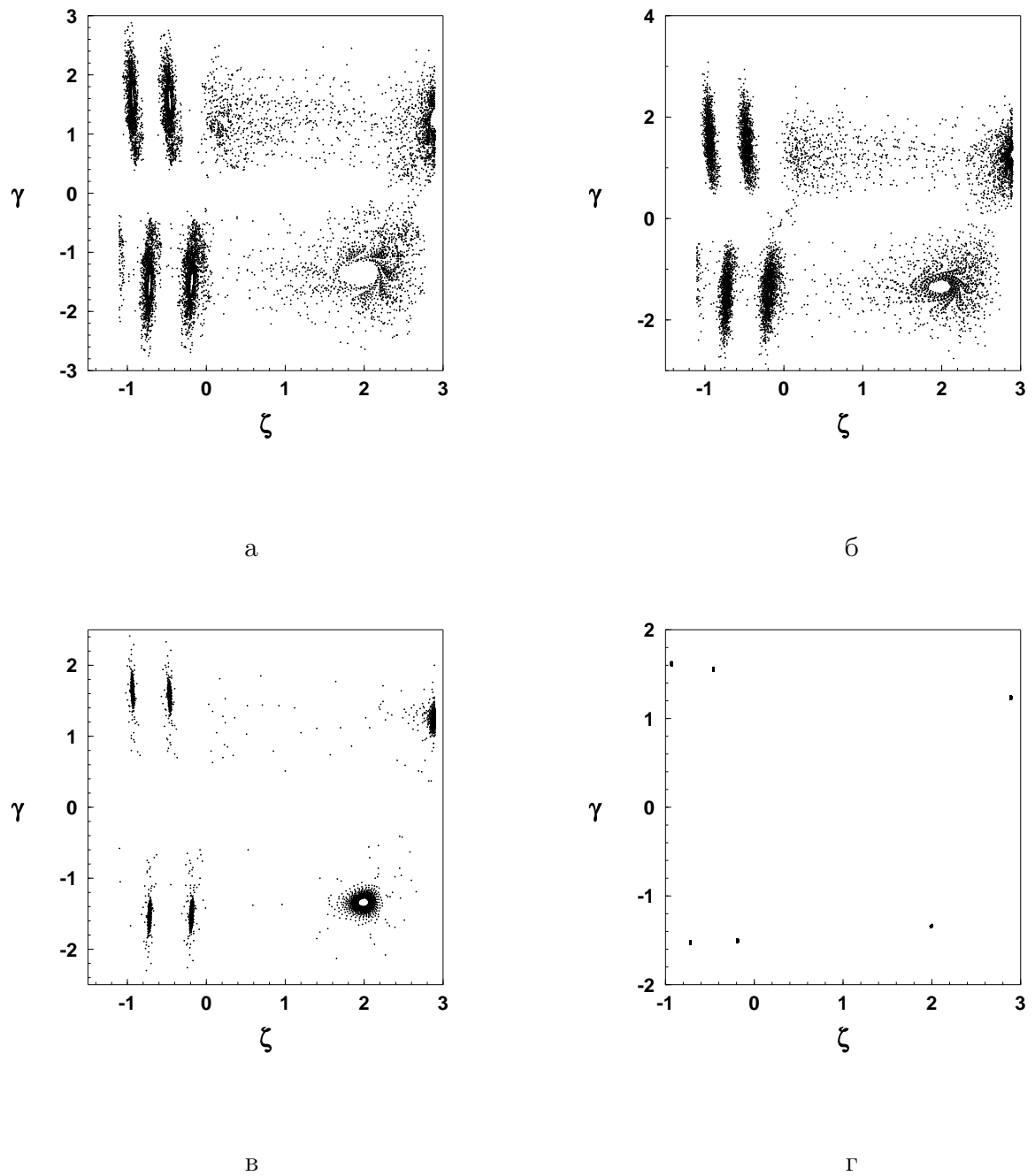


Рис. 5.24: Проекция сечения Пуанкаре плоскостью  $\beta = 0$  при  $X = 7.75$  и  $\delta = 0(a)$ ,  $\delta = 0.001(б)$ ,  $\delta = 0.005(в)$ ,  $\delta = 0.007(г)$ .

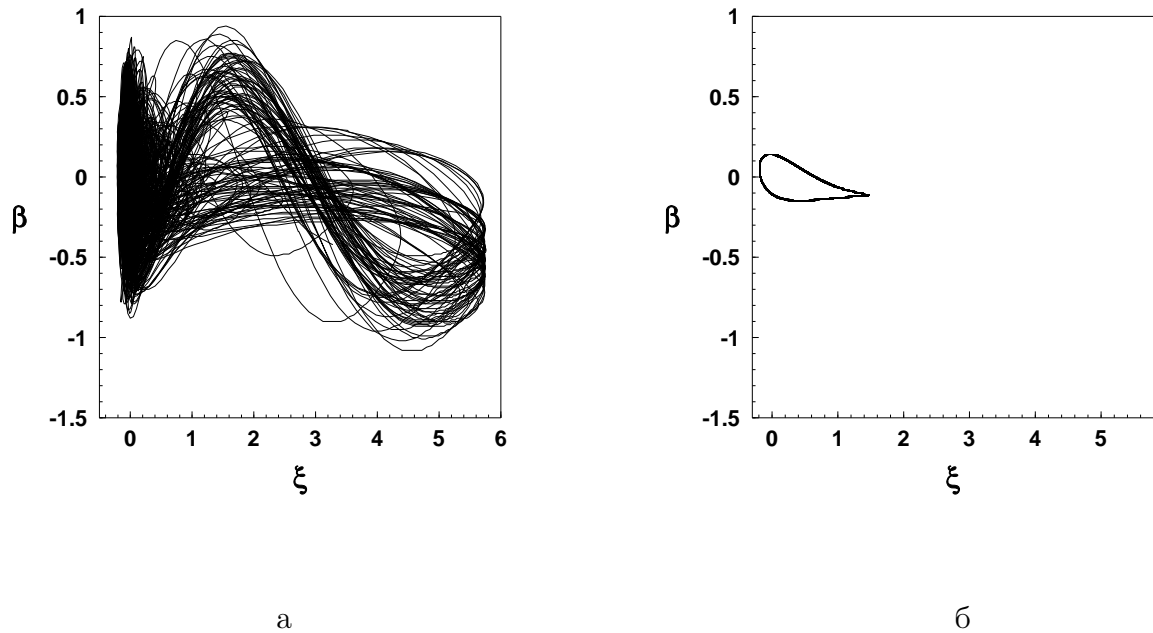


Рис. 5.25: Проекция фазового портрета при  $X = 4.25$  и  $\delta = 0$  (а),  $\delta = 0.106$  (б).

дельный цикл очень простой структуры. Цикл имеет следующие значения старших показателей ляпуновских характеристических показателей:  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = -0.04$ . Проекция фазового портрета этого цикла приведена на рис. 5.25.б [112]. Наблюдается заметное уменьшение амплитуд колебаний фазовых переменных цикла по сравнению с амплитудами колебаний фазовых переменных исчезнувшего хаотического аттрактора. В этом случае происходит жесткий переход от хаотических решений к регулярным [5]. При дальнейшем увеличении значений запаздывания хаотические аттракторы не обнаружены.

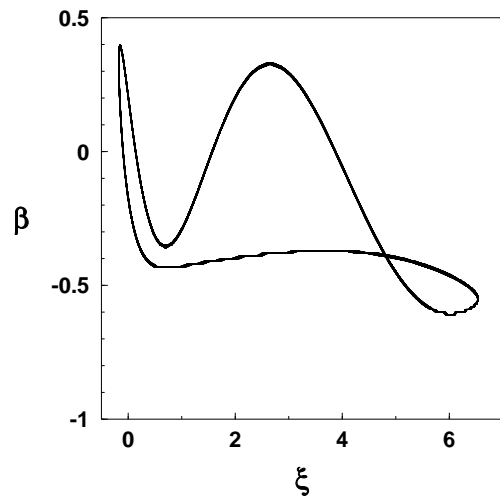
Наиболее интересными являются случаи, когда наличие запаздывания в системе порождает новые хаотические аттракторы. Предположим, что  $X = 5.25$ , а  $\delta = 0$ , то есть запаздывание в системе (5.32) отсутствует. В этом случае в системе существует устойчивый предельный цикл, проекция фазового портрета которого приведена на рис. 5.26.а [112]. Старшие ляпуновские показатели этого цикла соответственно равны  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = -0.008$ . Как следует из результатов предыдущего параграфа, значение параметра

$X = 5.25$  находится достаточно далеко от границ областей, в которых система (5.15) имеет хаотические аттракторы. В окрестности этого значения  $X$  единственными аттракторами этой системы являются предельные циклы. Однако наличие запаздывания в системе порождает хаотические аттракторы и при  $X = 5.25$ . Так, при появлении в системе уравнений (5.32) ненулевого запаздывания предельный цикл достаточно простой структуры типа, приведенного на рис. 5.26.а, существует в интервале изменения значений запаздывания  $0 \leq \delta < 0.057$ . При значении запаздывания  $\delta = 0.057$  этот предельный цикл исчезает и в системе происходит жесткое возникновение хаотического аттрактора. Хаотические аттракторы такого типа существуют в интервале изменения запаздывания  $0.057 \leq \delta < 0.142$ . Проекция фазового портрета такого хаотического аттрактора, построенная при  $\delta = 0.08$ , приведена на рис. 5.26.б. Для этого хаотического аттрактора старшие ляпуновские показатели соответственно равны:  $\lambda_1 = 0.016$  и  $\lambda_2 = 0$ . При  $\delta = 0.142$  хаотический аттрактор исчезает и в системе возникает многооборотный предельный цикл, проекция фазового портрета которого приведена на рис. 5.26.в. Такие многооборотные циклы существуют в достаточно узком "окне периодичности",  $0.142 \leq \delta \leq 0.16$ . Затем, при  $\delta = 0.161$  в системе вновь возникает хаотический аттрактор. Проекция фазового портрета аттрактора, построенная при  $\delta = 0.17$ , приведена на рис. 5.26.г. Старший ляпуновский показатель для аттрактора, приведенного на рис. 5.26.г, равен,  $\lambda_1 = 0.018$ . Переход от цикла к хаосу осуществляется через перемежаемость. Причем ламинарной фазой этой перемежаемости является близкое к периодическому движение в окрестности исчезнувшего в результате седло-узловой бифуркации многооборотного цикла, а турбулентной - непредсказуемые наперед раскрутки вокруг витков исчезнувшего цикла. Хаотические аттракторы этого типа существуют при изменении запаздывания в пределах  $0.161 \leq \delta \leq 0.323$ . Влияние запаздывания на сечение Пуанкаре этих аттракторов показано на рис. 5.27 [112]. Соответствующие сечения Пуанкаре для предельных циклов являются точечными множествами, состоящими из конечного числа точек, которые по-

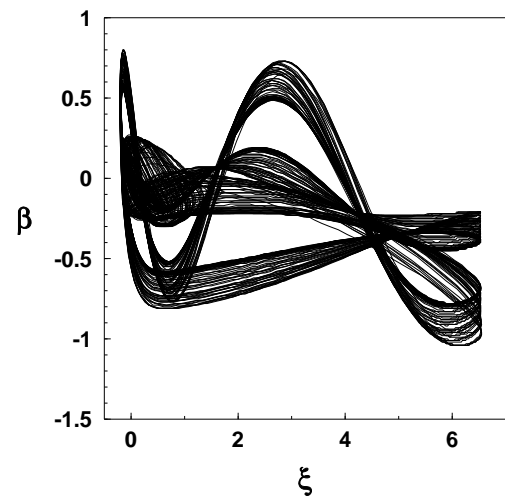
вторяются строго через время, равное периоду цикла (рис. 5.27.а, в). В свою очередь сечения Пуанкаре для хаотических аттракторов являются хаотическими точечными множествами. Точки таких множеств не совпадают друг с другом и их число постоянно растет с ростом времени численного интегрирования системы. Заметим, что для хаотического аттрактора, построенного при  $\delta = 0.08$ , сечение Пуанкаре имеет квазиленточную структуру (рис. 5.27.б). Сечение Пуанкаре для хаотического аттрактора, построенного при  $\delta = 0.17$  имеет вид развитого хаотического множества (рис. 5.27.г). При дальнейшем увеличении запаздывания хаотический аттрактор исчезает и в системе вновь возникает предельный цикл.

Наконец, рассмотрим случай когда  $X = 4.56$ . При отсутствии запаздывания,  $\delta = 0$ , в системе существует устойчивый предельный цикл. Проекция фазового портрета этого цикла приведена на рис. 5.28.а [112]. Такой предельный цикл сохраняется в системе уравнений (5.32) и при увеличении значений запаздывания в пределах  $0 \leq \delta \leq 0.123$ . При достижении запаздыванием значения  $\delta = 0.124$  этот цикл исчезает и в системе возникает хаотический аттрактор, проекции фазового портрета которого, для значения запаздывания  $\delta = 0.125$ , приведены на рис. 5.28.б [112]. Старшие ляпуновские показатели этого хаотического аттрактора соответственно равны,  $\lambda_1 = 0.027$  и  $\lambda_2 = 0$ . Переход от регулярного движения к хаотическому в этом случае вновь происходит через механизм перемежаемости, ламинарной фазой которой являются близкие к периодическим движения в окрестности исчезнувшего предельного цикла, а турбулентной – непредсказуемые раскрутки вокруг витков цикла. Такие хаотические аттракторы существуют при изменении запаздывания в интервале  $0.124 \leq \delta \leq 0.244$ .

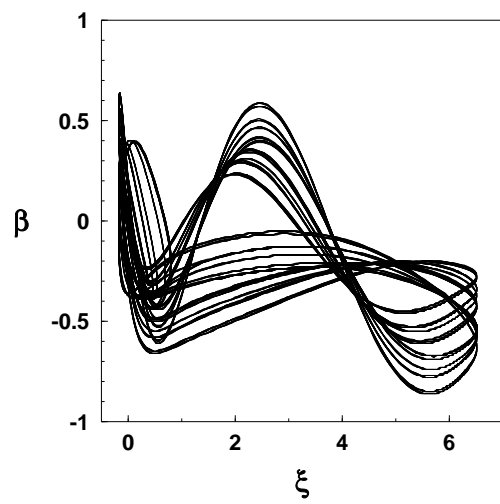
Наличие запаздывания в системе (5.32) позволяет выявить переход к хаосу и по сценарию Фейгенбаума. Так, при  $\delta = 0.28$  в системе возникает устойчивый граничный цикл иной структуры, чем приведенный на рис. 5.28.а. Далее, при уменьшении значений запаздывания, в системе начинается бесконечный каскад бифуркаций удвоения цикла. Проекция фазовых



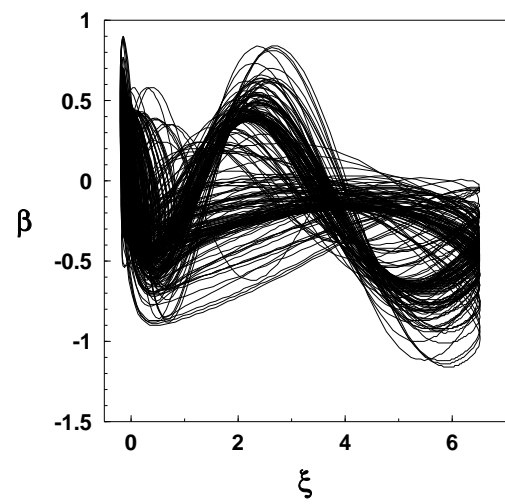
a



б



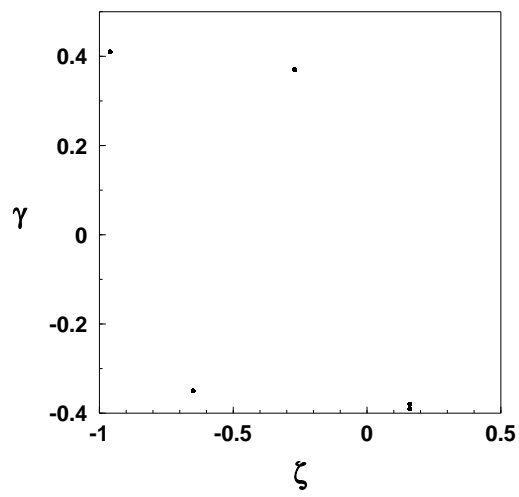
в



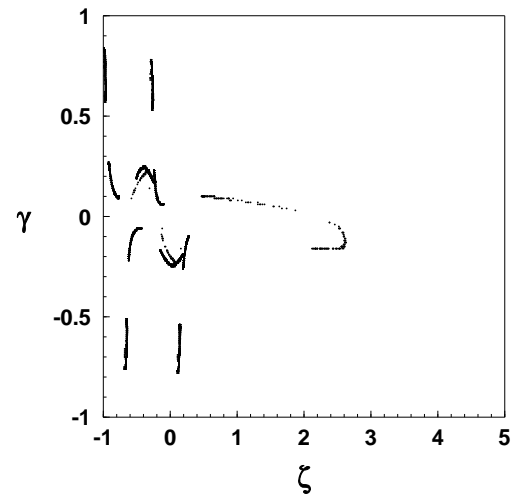
г

Рис. 5.26: Проекция фазового портрета при  $X = 5.25$  и  $\delta = 0$ (a),  $\delta = 0.08$ (б),  $\delta = 0.16$ (в),  $\delta = 0.17$ (г).

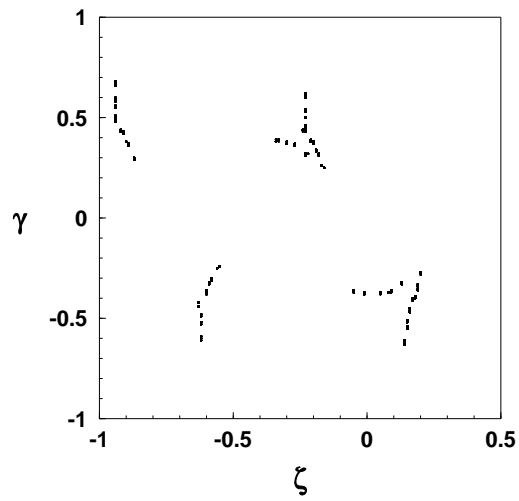




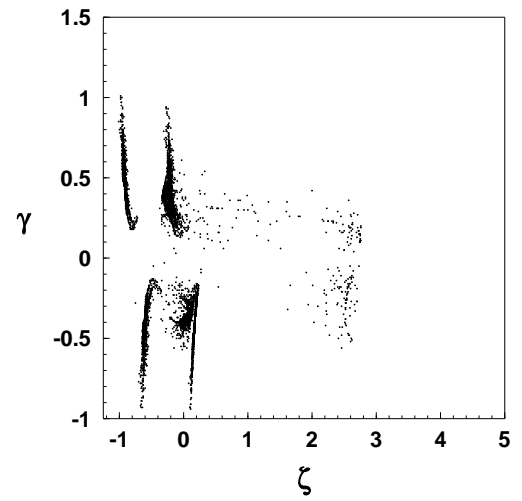
а



б



в



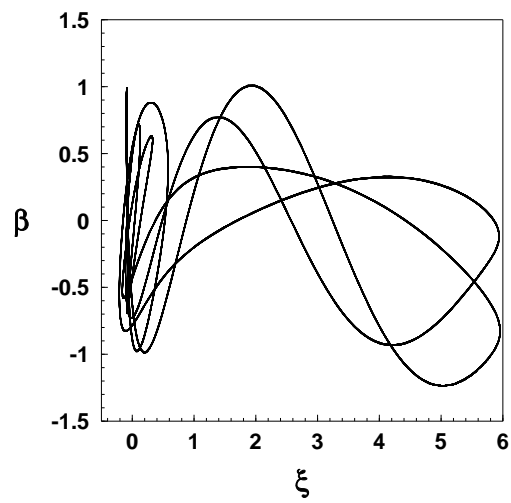
г

Рис. 5.27: Проекция сечения Пуанкаре плоскостью  $\beta = 0$  при  $X = 5.25$  и  $\delta = 0(a)$ ,  $\delta = 0.08(b)$ ,  $\delta = 0.16(v)$ ,  $\delta = 0.17(z)$ .

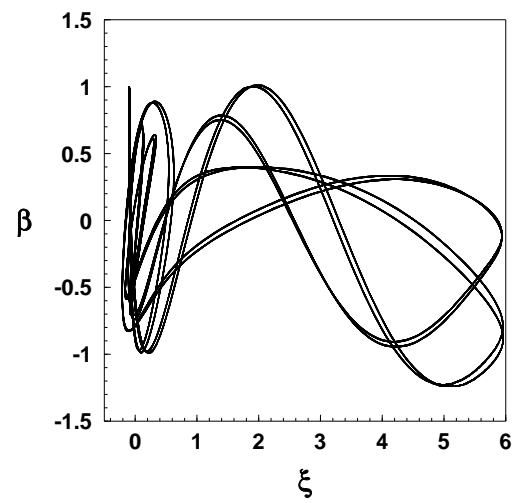


расположения точек на секущей плоскости.

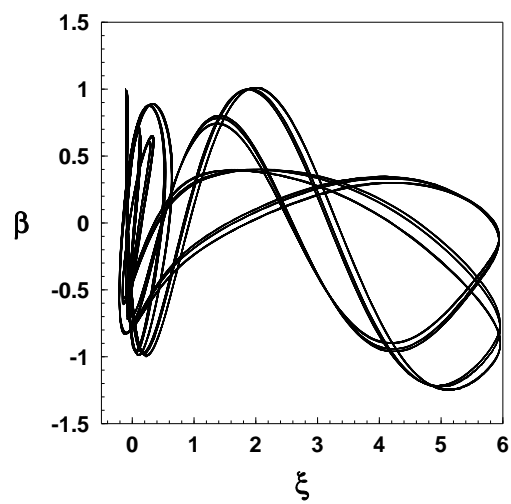
В завершение параграфа отметим, что возникновение новых хаотических аттракторов обнаружено и для других значений параметра  $X$ , для которых при отсутствии запаздывания в системе хаотические аттракторы не существуют. Таким образом, наличие запаздывания в системе уравнений (5.32) генерирует рождение новых хаотических аттракторов, причем даже в тех областях параметров этой системы, где они не существуют при отсутствии запаздывания.



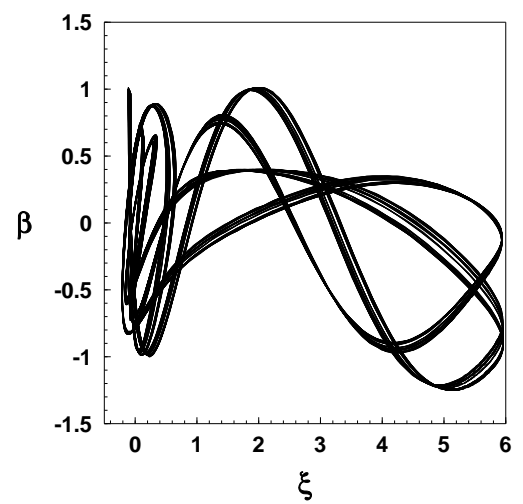
а



б

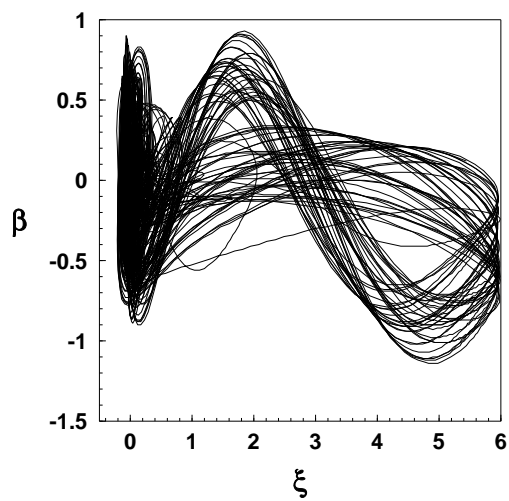


в

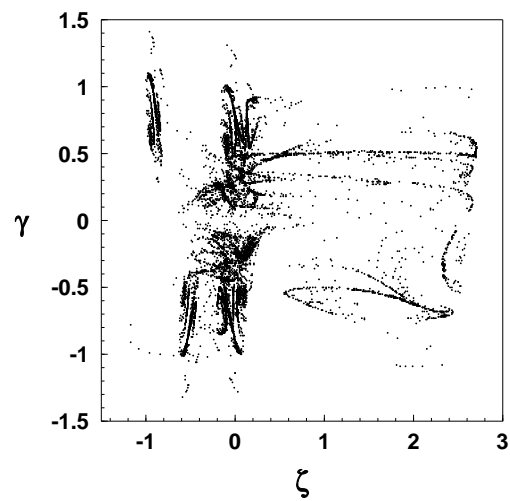


г

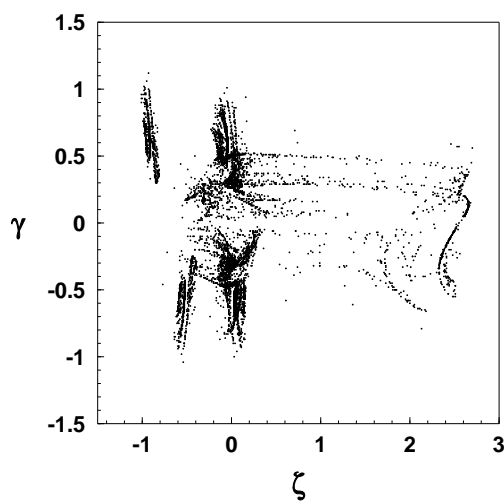
Рис. 5.29: Проекция фазового портрета при  $X = 4.56$  и  $\delta = 0.275(a)$ ,  $\delta = 0.27(b)$ ,  $\delta = 0.2687(в)$ ,  $\delta = 0.2683(г)$ .



a



б



в

Рис. 5.30: Проекция фазового портрета (a) и сечение Пуанкаре (б) при  $X = 4.56$ ,  $\delta = 0.267$ ; сечение Пуанкаре (в) при  $X = 4.56$ ,  $\delta = 0.125$ .

## 5.5 Выводы по главе

Таким образом, использование новой математической модели, описывающей процесс взаимодействия колебательных режимов пьезокерамического излучателя и задающего электрогенератора, позволило установить, что рассмотренная задача обладает исключительным разнообразием установившихся режимов как регулярных, так и хаотических. По сути, рассмотренной динамической системе присуще значительное число эффектов, характерных для задач нелинейной динамики в целом.

В системе существуют регулярные установившиеся режимы типа положений равновесия и предельных циклов, которые могут быть как устойчивыми по Ляпунову, так и неустойчивыми, в частности, седловыми.

Однако еще большее разнообразие эффектов выявлено при исследовании хаотической динамики системы. В данной детерминированной системе было обнаружено несколько типов хаотических аттракторов, в том числе и два типа гиперхаотических. Установлены и объяснены заметные отличия в фазовых портретах, сечениях и отображениях Пуанкаре, распределениях инвариантной меры и спектральной плотности у существующих в системе хаотических аттракторов. Показано, что системе присущи многие из встречающихся в нелинейной динамике сценариев перехода от регулярных движений к хаотическим. Так, в системе обнаружены переходы "порядок–хаос" по сценарию Фейгенбаума, через перемежаемость первого типа по Поманевиллю, жесткие переходы к хаосу.

Для изучения влияния различных факторов запаздывания построена математическая модель системы в виде системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Показано, что факторы запаздывания существенно влияют на динамику системы. При изменениях значений запаздывания в системе наблюдается большое разнообразие изменений типа установившихся режимов вида "хаос–порядок" или "порядок–хаос–порядок–хаос".

Еще раз подчеркнем, что все богатство хаотической динамики системы

удается выявить только благодаря математическому моделированию её как системы с ограниченным возбуждением. Установлено, что существование детерминированного хаоса в системе объясняется, главным образом, взаимодействием между подсистемами (генератором и излучателем), а не автономными свойствами каждой из подсистем в отдельности.

## Глава 6

# Динамический хаос при ограниченном возбуждении колебаний цилиндрического бака с жидкостью

### 6.1 Введение

Исследованию колебаний свободной поверхности жидкости в жестких баках посвящено значительное количество работ как теоретических, так и экспериментальных, среди которых можно отметить работы: [41, 73, 82, 23, 60, 200, 202, 203]. В некоторых из вышеприведенных работ имеется детальная библиография по колебаниям оболочек с жидкостью. Такое внимание к этим задачам обусловлено, помимо исследовательского интереса, большим приложением получаемых результатов во многих областях современной техники. Громадное количество современных машин и механизмов в качестве неотъемлемого элемента конструкций содержит различные баки с жидкостями.

Подавляющее большинство работ по изучению колебаний бака с жидкостью посвящено исследованию регулярной динамики поверхностных волн жидкости. Однако открытие детерминированного хаоса настоятельно требует изучения хаотических колебаний свободной поверхности жидкости в цилиндрических баках. Настоящая глава посвящена моделированию и исследованию резонансных хаотических и регулярных колебаний бака с жидкостью



при ограниченном возбуждении. Будут рассмотрены случаи горизонтального и вертикального возбуждения электродвигателем ограниченной мощности платформы бака, частично заполненного жидкостью. При выполнении определенных соотношений между скоростью вращения вала электродвигателя и частотой основного тона колебаний поверхности жидкости в системе "бак с жидкостью – электродвигатель" имеет место вынужденный резонанс (при горизонтальном возбуждении) или параметрический резонанс (при вертикальном возбуждении).

## 6.2 Хаос при вынужденном резонансе

### 6.2.1 Математическая модель при ограниченном возбуждении

Резонансные колебания и волны в жидкости в цилиндрических и сферических баках (баках с окружной координатой) достаточно хорошо описываются маятниковыми моделями [51, 53, 55, 56, 182, 145, 158, 159, 160, 31, 192, 201, 204, 203, 206]. Явление резонанса само по себе, как преимущественные колебания по одной или нескольким модам, позволяет свести исследование континуальных систем к их маломерным моделям. Это хорошо известная процедура [61], при применении которой удастся исключить из рассмотрения влияние нерезонансных мод колебаний на динамику резонансных мод. Когда эта процедура используется в задачах динамики жидкости в цилиндре или в сфере при резонансе она выделяет, как минимум, уравнения для двух сопряженных мод, которые имеют равные собственные частоты и соответствуют собственным функциям по окружной координате  $\theta$  вида  $\cos n\theta$  и  $\sin n\theta$ . В случае близости собственных частот, отвечающих модам с разными волновыми параметрами, эта процедура [144] приводит к четырем уравнениям, причем для резонансных мод их связь и взаимовлияние учитываются.

Взаимосвязь мод можно рассматривать как путь к возникновению хаотических аттракторов, исследуемых детерминированных систем. Если определенные нормальные моды колебаний распределенной системы связаны и имеют одинаковую частоту, то регулярные установившиеся колебания по любой форме могут перейти в хаотические из-за нелинейного взаимодействия между сопряженными формами ([202, 192, 145]). В случае близких собственных частот у форм с различными волновыми параметрами их взаимодействие также порождает хаос ([144, 158, 159, 238, 170, 206]). Заметим, что уравнение для одной моды не может иметь хаотических аттракторов в силу того, что размерность его фазового пространства равна двум [60].

Еще одним путем к возникновению детерминированного хаоса является нелинейное взаимодействие между колебательной системой (баком с жидко-

стью) и устройством возбуждения колебаний (электродвигателем). При сравнимости мощности источника возбуждения и мощности, потребляемой колебательной системой (что, как правило, всегда имеет место на практике), их взаимодействие принципиально меняет динамику как самой системы, так и источника возбуждения. В частности это взаимодействие может порождать хаотические режимы в совокупной системе.

Как было показано в работах [170, 201, 203], вынужденный и параметрический резонансы при колебаниях жидкости в баках описываются разными системами уравнений, имеющими качественно разные свойства. Причем без учета взаимодействия с источником возбуждения хаотические колебания жидкости в баках невозможны в случае параметрического резонанса [43]. Однако учет взаимодействия с источником возбуждения колебаний жидкости может порождать хаос как при вынужденном, так и при параметрическом резонансе. Существование таких режимов было установлено в работах [50, 51]. Но в этих работах доказательство существования хаотических режимов проведено только для частного случая планарных колебаний свободной поверхности жидкости. Появление хаотических режимов в более общем случае пространственных колебаний свободной поверхности впервые установлено в работах [53, 56, 60, 177, 178, 176, 181, 183, 182].

Предположим, что электродвигатель посредством кривошипно-шатунного механизма создает горизонтальные перемещения цилиндрического бака, частично заполненного жидкостью (рис. 6.1). Обозначим через  $\Psi$  угол вращения вала электродвигателя. Когда кривошип поворачивается на угол  $\Psi(t)$ , бак получает перемещение в горизонтальной плоскости  $u(t) = a \cos \Psi(t)$ . Для описания колебаний свободной поверхности жидкости введем цилиндрическую систему координат  $Ox r \theta$  с началом на оси симметрии цилиндра на невозмущенной поверхности жидкости. Уравнение рельефа свободной поверхности жидкости будем записывать в виде

$$x = \zeta(r, \theta, t) \quad (6.1)$$

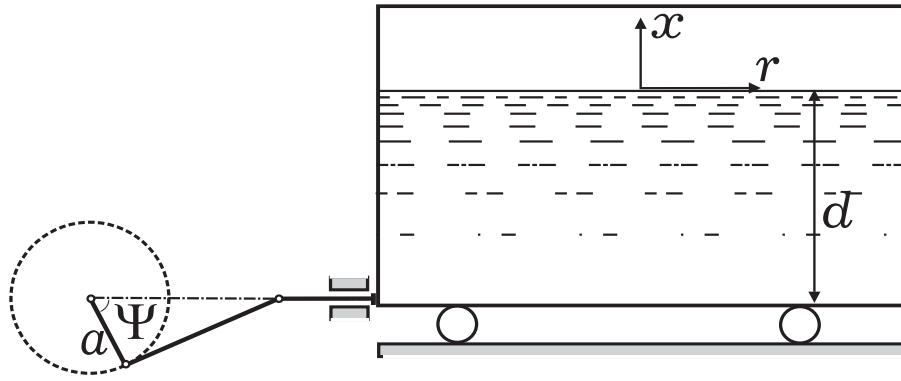


Рис. 6.1: Схема системы двигатель-бак с жидкостью.

Пусть жидкость в баке с жестким дном является невязкой, несжимаемой и имеет плотность  $\rho$ . Обозначим радиус цилиндрического бака через  $R$ , а его поперечное сечение через  $S$ . Предположим, что жидкость заполняет бак до глубины  $x = -d$ . Направление перемещений  $u(t)$  платформы бака полагаем совпадающим с направлением полярной оси  $Or$ .

Движение жидкости в баке будем описывать с помощью потенциала скорости жидкости  $\varphi(x, r, \theta, t)$ . Тогда граничная задача для потенциала может быть сформулирована следующим образом [200, 202, 203, 165, 206]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0 \quad (-d < x < \zeta; r, \theta \in S), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=0} &< \infty; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=-d} = 0; \\ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \nabla \zeta \nabla \varphi \right) \Big|_{x=\zeta} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Уравнения (6.2) и граничные условия можно получить из требования постоянства интеграла

$$S I_1 = \frac{1}{2} \int_Q \int \int (\nabla \varphi^2) dS dx - \int_S \int (\varphi) \Big|_{x=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} dS \quad (6.3)$$

по отношению к вариациям  $\delta \varphi$  для заданной поверхности  $\zeta$  (вариационный принцип Дирихле).

Представим функции  $\zeta(r, \theta, t)$  и  $\varphi(x, r, \theta, t)$  в виде рядов по собствен-

ным модам колебаний, а именно:

$$\begin{aligned}\zeta(r, \theta, t) &= \sum_{ij} [q_{ij}^c(t) \chi_{ij}(r) \cos i\theta + q_{ij}^s(t) \chi_{ij}(r) \sin i\theta] \\ \varphi(x, r, \theta, t) &= \sum_{ij} [\varphi_{ij}^c(t) X_{ij}(x, r) \cos i\theta + \varphi_{ij}^s(t) X_{ij}(x, r) \sin i\theta],\end{aligned}\quad (6.4)$$

где  $q_{ij}^c$ ,  $q_{ij}^s$  и  $\varphi_{ij}^c$ ,  $\varphi_{ij}^s$  – неизвестные амплитуды нормальных мод;  $\chi_{ij}(r) \cos i\theta$ ,  $\chi_{ij}(r) \sin i\theta$ ,  $X_{ij} \cos i\theta$  и  $X_{ij} \sin i\theta$  – собственные моды в линейной аппроксимации задачи о колебаниях идеальной жидкости в цилиндрической оболочке. При этом [200],

$$\begin{aligned}\chi_{ij}(r) &= \frac{J_i(\mu_{ij}r)}{N_{ij}} \quad (i = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, 3, \dots); \\ X_{ij} &= \frac{\operatorname{ch} \mu_{ij}(d+x) \chi_{ij}(r)}{\operatorname{ch} \mu_{ij}d}; \\ N_{ij}^2 &= \frac{1}{2}(1 + \delta_{0i}) \left[ 1 - \left( \frac{i}{\mu_{ij}R} \right)^2 \right] J_i(\mu_{ij}R).\end{aligned}\quad (6.5)$$

Здесь  $J_i(\cdot)$  – функции Бесселя;  $\mu_{ij}$  – собственные значения, определяемые из уравнения  $J'_i(\mu_{ij}R) = 0$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Используя принцип Дирихле для 6.5, на основании (6.3)–(6.5) записываем нелинейные соотношения вида

$$\varphi_{ij}^{c,s} = l_{ijmn} \dot{q}_{mn}^{c,s}(t), \quad (6.6)$$

где  $l_{ijmn}$  – нелинейные функции от амплитуд  $q_{hb}^{c,s}(t)$  [200].

Тогда кинетическая энергия системы (которая равна сумме кинетических энергий вращающегося вала двигателя, колеблющегося бака с жидкостью и колебаний свободной поверхности жидкости) равна [51, 53, 60, 182, 183]:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} I \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} m_0 \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \rho S \sum_{i,j,m,n} k_{ijmn} \varphi_{ij}^{c,s} \varphi_{mn}^{c,s} = \\ &= \frac{1}{2} I \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} m_0 \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \rho S \sum_{i,j,m,n} a_{ijmn} \dot{q}_{ij}^{c,s} \dot{q}_{mn}^{c,s}.\end{aligned}\quad (6.7)$$

Здесь  $I$  – момент инерции двигателя;  $m_0$  – масса бака с жидкостью (массу кривошипно-шатунного механизма считаем пренебрежимо малой);  $k_{ijmn}$  и  $a_{ijmn}$  – нелинейные функции от  $q_{hb}^{c,s}(t)$ .

В свою очередь потенциальная энергия системы определяется по формуле [51, 53, 60, 182, 183]:

$$V = \rho S \sum_{i,j} \left( \dot{r}_{ij} q_{ij}^c + \frac{1}{2} g q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s} \right), \quad (6.8)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения  $r_{ig} = \int_S r \chi_{ij} dS$ .

Следовательно, лагранжиан системы имеет вид:

$$\begin{aligned} L = T - V = & \frac{1}{2} I \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} m_0 a^2 \dot{\Psi}^2 \sin^2 \Psi + \frac{\rho S}{2} \sum_{i,j,m,n} a_{ijmn} \dot{q}_{ij}^{c,s} \dot{q}_{mn}^{c,s} + \\ & + a \rho S (\dot{\Psi}^2 \cos \Psi + \ddot{\Psi} \sin \Psi) \sum_{i,j} r_{ij} q_{ij}^c - \frac{1}{2} \rho S g \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

На основании (6.9) можно записать уравнение движения для координаты двигателя  $\Psi(t)$ :

$$\begin{aligned} I \ddot{\Psi} = & -m_0 a^2 (\dot{\Psi}^2 \sin \Psi \cos \Psi + \ddot{\Psi} \sin^2 \Psi) + a \rho S (\dot{\Psi}^2 \sin \Psi - \\ & - \ddot{\Psi} \cos \Psi) \sum_{i,j} r_{ij} q_{ij}^c - 2 a \rho S \dot{\Psi} \cos \Psi \sum_{i,j} r_{ij} \dot{q}_{ij}^c + H_1(\dot{\Psi}) - H_2(\dot{\Psi}). \end{aligned} \quad (6.10)$$

При этом учтены:  $H_1(\dot{\Psi})$  – движущий момент электродвигателя и  $H_2(\dot{\Psi})$  – момент внутренних сил сопротивления вращению вала электродвигателя [37, 174].

Пусть скорость вращения вала электродвигателя  $\dot{\Psi}(t)$  в установившемся режиме близка к собственной частоте  $\omega_{11}$  основного тона колебаний свободной поверхности, что соответствует  $i = 1, j = 1$  в (6.3)–(6.5). Следовательно, реализуются условия резонансного возбуждения основных мод колебаний  $q_{11}^c(t) \chi_{11}(r) \cos \theta$  и  $q_{11}^s(t) \chi_{11}(r) \sin \theta$ . Введем малый положительный параметр

$$\varepsilon = (a r_{11} \mu_{11}^2)^{\frac{1}{3}},$$

где  $r_{11} = 0.4968R$  и  $\mu_{11} = 1.8412R^{-1}$  [203]. Тогда расстройку частот  $\dot{\Psi}(t)$  и  $\omega_{11}$  считаем малой величиной, пропорциональной  $\varepsilon^2$ , а именно:

$$\dot{\Psi}(t) - \omega_{11} = \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega_{11}\beta(t). \quad (6.11)$$

Здесь  $\omega_{11} = (g\mu_{11} \operatorname{th} \mu_{11}d)^{\frac{1}{2}}$ .

Аппроксимируем колебания свободной поверхности жидкости основными сопряженными модами колебаний

$$q_{11}^c(t)\chi_{11}(r) \cos \theta, \quad q_{11}^s(t)\chi_{11}(r) \sin \theta$$

и вторичными модами

$$q_{01}(t)\chi_{01}(r), \quad q_{21}^c(t)\chi_{21}(r) \cos 2\theta, \quad q_{21}^s(t)\chi_{21}(r) \sin 2\theta.$$

Как установлено в [202] коэффициенты связи вторичных мод с основными в разложении нелинейных функций  $a_{ijmn} = a_{ijmn}(q_{hb}^{c,s})$  (6.7) отличны от нуля и на два порядка больше, чем коэффициенты связи с другими модами. Поэтому возбуждение основных мод колебаний обуславливает посредством нелинейной связанности мод появление колебаний по вторичным модам.

Будем искать амплитуды колебаний по основным модам в виде [51, 53, 60, 182, 183]:

$$\begin{aligned} q_{11}^c(t) &= \varepsilon\xi[p_1(\tau) \cos \Psi(t) + q_1(\tau) \sin \Psi(t)]; \\ q_{11}^s(t) &= \varepsilon\xi[p_2(\tau) \cos \Psi(t) + q_2(\tau) \sin \Psi(t)], \end{aligned} \quad (6.12)$$

а по вторичным модам в виде [51, 53, 60, 182, 183]:

$$\begin{aligned} q_{01}(t) &= \varepsilon^2\xi[A_{01}(\tau) \cos 2\Psi(t) + B_{01}(\tau) \sin 2\Psi(t) + C_{01}(\tau)]; \\ q_{21}^c(t) &= \varepsilon^2\xi[A_{21}^c(\tau) \cos 2\Psi(t) + B_{21}^c(\tau) \sin 2\Psi(t) + C_{21}^c(\tau)]; \\ q_{21}^s(t) &= \varepsilon^2\xi[A_{21}^s(\tau) \cos 2\Psi(t) + B_{21}^s(\tau) \sin 2\Psi(t) + C_{21}^s(\tau)], \end{aligned} \quad (6.13)$$

где  $\xi = \frac{\omega_{11}^2}{g\mu_{11}}$ ;  $\tau$  – медленное время

$$\tau = \frac{1}{2}\varepsilon^2\Psi(t); \quad (6.14)$$

$p_1(\tau)$ ,  $q_1(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$ ,  $A_{01}(\tau)$ ,  $B_{01}(\tau)$ ,  $C_{01}(\tau)$ ,  $A_{21}^c(\tau)$ ,  $B_{21}^c(\tau)$ ,  $C_{21}^c(\tau)$ ,  $A_{21}^s(\tau)$ ,  $B_{21}^s(\tau)$ ,  $C_{21}^s(\tau)$  – безразмерные амплитуды колебаний. Для их определения подставим выражения 6.12 и 6.13 в лагранжиан 6.9 и усредним его по, явно входящему, быстрому времени  $\Psi(t)$  от 0 до  $2\pi$ . В результате, используя соотношения вида

$$\begin{aligned} \dot{q}_{11}^{c,s} = & \varepsilon \xi \dot{\Psi}(t) [q_i(\tau) \cos \Psi(t) - p_i(\tau) \sin \Psi(t)] + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^3 \xi \omega_{11} \left[ \frac{dp_i}{d\tau} \cos \Psi(t) + \frac{dp_i}{d\tau} \sin \Psi(t) \right] + \varepsilon^4 \{ \dots \} \end{aligned} \quad (6.15)$$

для амплитуд колебаний по основным модам (при  $i = 1, 2$ ), получим следующее выражение для усредненного лагранжиана:

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = & \frac{1}{2} I \dot{\Psi}^2 + \frac{m_0 a^2}{4} \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^4 g \xi \rho S \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{dp_1}{d\tau} q_1 - p_1 \frac{dq_1}{d\tau} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{dp_2}{d\tau} q_2 - p_2 \frac{dq_2}{d\tau} \right) + p_1 + \frac{\ddot{\Psi}}{\omega_{11}^2} q_1 + \beta E + \frac{\xi^2 \omega_{11}^2}{4g} \left[ a_{1111} (E_1^2 + E_2^2) + \right. \\ & + 2a_{1122} \left( E_1 E_2 + \frac{1}{2} M^2 \right) + 2(a_{1212} + a_{1221}) \left( E_1 E_2 - \frac{1}{2} M^2 \right) \left. \right] + \\ & + + \frac{\xi \omega_{11}^2}{2g} \sum_{n,m,h} \left[ \left( 2a_{nmh1} - \frac{1}{2} a_{h1mn} \right) (A_{h1}^{c,s} (p_m p_n - q_m q_n) + B_{h1}^{c,s} (p_m q_n + p_n q_m)) + \right. \\ & + a_{h1mn} C_{h1}^{c,s} (p_m p_n + q_m q_n) \left. \right] + \frac{1}{2} \sum_h [b_{h1} (A_{h1}^{c,s})^2 + b_{h1} (B_{h1}^{c,s})^2 - \\ & - (C_{h1}^{c,s})^2] \left. \right\} + \varepsilon^5 \{ \dots \}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

где  $E = E_1 + E_2$ ,  $E_n = \frac{1}{2} (p_n^2 + q_n^2)$ ;  $M = p_1 q_2 - p_2 q_1$ ;  $b_{h1} = \frac{4\omega_{11}^2 - \omega_{1h}^2}{\omega_{1h}}$ ;  $\omega_{1h}$  – собственные частоты по вторичным модам;  $n = 1, 2$ ;  $m = 1, 2$ ;  $h = 0, 2$

В силу принципа Дирихле, вариации усредненного лагранжиана  $\langle L \rangle$  по амплитудам вторичных мод  $(A_{h1}^{c,s})$ ,  $(B_{h1}^{c,s})$  и  $(C_{h1}^{c,s})$  должны быть стационарными. То есть должны выполняться соотношения:

$$\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial A_{h1}^{c,s}} = 0, \quad \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial B_{h1}^{c,s}} = 0, \quad \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial C_{h1}^{c,s}} = 0.$$

Из этих соотношений можно определить величины  $A_{h1}^{c,s}$ ,  $B_{h1}^{c,s}$ ,  $C_{h1}^{c,s}$  как функции от  $p_n(\tau)$  и  $q_n(\tau)$ . После подстановки полученных значений  $A_{h1}^{c,s}$ ,  $B_{h1}^{c,s}$ ,  $C_{h1}^{c,s}$



в усредненный лагранжиан он запишется только как функция зависящая от  $\dot{\Psi}(t)$ ,  $p_1(\tau)$ ,  $q_1(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$  и  $q_2(\tau)$  [60] :

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = & \frac{1}{2} I \dot{\Psi}^2 + \frac{m_0 a^2}{4} \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^4 g \xi \rho S \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dp_1}{d\tau} q_1 - p_1 \frac{dq_1}{d\tau} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{dp_2}{d\tau} q_2 - p_2 \frac{dq_2}{d\tau} \right) + p_1 + \frac{\ddot{\Psi}}{\omega_{11}^2} q_1 + \beta E + \frac{1}{2} A E^2 + \frac{1}{2} B M^2 \right] + \varepsilon^5 \{ \dots \}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Отметим, что в (6.16) – (6.17)  $E$  и  $M$  соответствуют энергии и угловому моменту колебаний жидкости по основным формам. Константы  $A$  и  $B$ , зависящие от геометрических параметров  $d$  и  $R$ , приведены в работе [202].

Теперь, рассматривая в качестве обобщенных координат функции  $p_1(\tau)$ ,  $q_1(\tau)$  и  $p_2(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$ , исходя из уравнений (6.17) можем записать уравнения Лагранжа для колебаний свободной поверхности жидкости в виде [51, 53, 60, 182, 183]:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - (\beta + AE) q_1 + BM p_2; \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + (\beta + AE) p_1 + BM q_2 + 1; \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - (\beta + AE) q_2 - BM p_1; \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + (\beta + AE) p_2 - BM q_1, \end{aligned} \quad (6.18)$$

где  $\alpha = -\frac{\delta}{\omega_{11}}$ ;  $\delta$  – коэффициент сил вязкого демпфирования  $\delta \dot{q}_{11}^{c,s}$ , учитываемых дополнительно к входящим в (6.17).

Система уравнений (6.18) содержит пять неизвестных функций  $p_1(\tau)$ ,  $q_1(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$ ,  $\beta(\tau)$ . Поэтому для ее замыкания необходимо записать еще одно уравнение. Для этого введем замену переменных

$$\dot{\Psi}(t) = \Omega(\tau). \quad (6.19)$$

Подставляя (6.19) в (6.10) и проводя усреднение по быстрому времени  $\Psi(t)$ , с учетом соотношений (6.12) – (6.13), получим:

$$\dot{\Omega} = -\varepsilon^3 \alpha_1 \dot{\Omega} + \varepsilon^4 [M_1(\Omega) - \alpha_2 \xi \Omega^2 q_1 - \alpha_2 \xi \dot{\Omega} p_1] + \varepsilon^5 \{ \dots \}. \quad (6.20)$$

Здесь

$$\varepsilon^3 \alpha_1 = \frac{m_0 a^2}{I}, \quad \varepsilon^3 \alpha_2 = \frac{ar_{11} \rho S}{I}, \quad \varepsilon^4 M_1(\Omega) = \frac{H_1(\Omega) - H_2(\Omega)}{I}.$$

В медленном времени получим соответственно:

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \varepsilon^2 M_2(\Omega) - \varepsilon^2 \mu q_1 + \varepsilon^3 \{\dots\}, \quad (6.21)$$

при этом

$$\varepsilon^2 M_2(\Omega) = \frac{2\varepsilon^2}{\omega_{11}} M_1(\Omega); \quad \mu = 2\xi \alpha_2 \omega_{11}.$$

Так как в дальнейшем мы будем исследовать установившиеся режимы взаимодействия в системе "бак с жидкостью – электродвигатель", то в качестве движущего момента электродвигателя  $H_1(\Omega)$  используем его статическую характеристику [174]. Воспользовавшись линейной аппроксимацией этой характеристики можем записать:

$$\varepsilon^2 M_2(\Omega) = \varepsilon^2 (N_0 + N_1 \Omega),$$

где  $N_0, N_1$  являются постоянными. Далее преобразуем (6.21) в уравнение относительно  $\beta(\tau)$ . В результате получим:

$$\frac{d\beta}{d\tau} = N_3 + N_1 \beta - \mu_1 q_1, \quad (6.22)$$

где

$$N_3 = \frac{2}{\omega_{11}} (N_0 + N_1 \omega_{11}); \quad \mu_1 = \frac{2\mu}{\omega_{11}}.$$

Таким образом, процесс взаимодействия между колебаниями свободной поверхности жидкости по доминантным резонансным модам и вращением вала электродвигателя с ограниченной мощностью описывается следующей

системой пяти эволюционных уравнений [51, 53, 55, 60, 182, 183]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - \left[ \beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_2; \\
 \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + \left[ \beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_2 + 1; \\
 \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 + N_1 \beta - \mu_1 q_1 \\
 \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - \left[ \beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_1; \\
 \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + \left[ \beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_1.
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Система уравнений (6.23) использовалась в качестве основной математической модели для исследования установившихся резонансных колебаний свободной поверхности жидкости. Особо следует подчеркнуть, что система уравнений (6.23) является системой маятникового типа. С точностью до значений параметров  $A$  и  $B$  она совпадает с системами, рассмотренными в п. 3.3.

Далее особое внимание будет уделено возникновению, развитию и исчезновению динамического хаоса в данной детерминированной динамической системе. Заметим, что размерность фазового пространства  $(p_1, q_1, \beta, p_2, q_2)$  системы уравнений (6.23) равна пяти. Поэтому в ее фазовом пространстве возможно существование хаотических аттракторов.

## 6.2.2 Хаотические и регулярные аттракторы при вынужденном резонансе

Система уравнений (6.23) является существенно нелинейной, следовательно нахождение ее точных решений в виде аналитических формул в общем случае невозможно. Поэтому для построения решений системы (6.23) использовались численные методы и алгоритмы. В пространстве параметров  $(\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1)$  этой системы уравнений были проведены численные эксперименты для определения областей существования хаотических решений и

для исследования процесса перехода от регулярных решений к хаотическим [51, 53, 55, 60, 121, 182, 183]. Методика проведения таких численных экспериментов ранее детально описана в главах 2–3.

Система уравнений (6.23) имеет шесть параметров  $(\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1)$ , которые определяют ее поведение при установившихся режимах. Определим тип данной динамической системы. С этой целью найдем дивергенцию  $\Delta$  системы (6.23). Очевидно, что дивергенция системы в фазовом пространстве равна:

$$\begin{aligned} \Delta \equiv \frac{\partial \left( \frac{dp_1}{d\tau} \right)}{\partial p_1} + \frac{\partial \left( \frac{dq_1}{d\tau} \right)}{\partial q_1} + \frac{\partial \left( \frac{d\beta}{d\tau} \right)}{\partial \beta} + \frac{\partial \left( \frac{dp_2}{d\tau} \right)}{\partial p_2} + \frac{\partial \left( \frac{dq_2}{d\tau} \right)}{\partial q_2} = \\ = 4\alpha + N_1. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Как видно из (6.24), дивергенция системы зависит от приведенного коэффициента сил вязкого демпфирования  $\alpha$  и параметра  $N_1$ , который характеризует угол наклона статической характеристики электродвигателя [174]. Для реальных физических систем эти параметры всегда будут отрицательными. Следовательно, система уравнений (6.23) является диссипативной. Это означает, что любой начальный фазовый объем системы стремиться к нулю при неограниченном возрастании времени. То есть, любое начальное подмножество изображающих точек, которое имеет ненулевой фазовый объем, с течением времени концентрируется в итоге на одном или нескольких аттракторах. Причем эти аттракторы имеют нулевой фазовый объем. Как мы увидим далее, аттракторы системы (6.23) могут быть как регулярными, так и хаотическими.

Рассмотрим бифуркации происходящие в данной системе при изменении некоторых из ее параметров. Предположим, что бак заполнен жидкостью до глубины  $h > 3R$ , поэтому, как показано в работе в [202]:

$$A = 1.112; \quad B = -1.531 \quad (6.25)$$

Параметр демпфирования  $\alpha$  считается малым [203]:

$$\alpha = -0.1. \quad (6.26)$$

Также предположим, что выполняются условия для предрезонансного влияния электродвигателя на колебания жидкости, то есть  $N_3 < 0$ . Тогда для статической характеристики электродвигателя можно принять, что [174]:

$$N_3 = -0.1; \quad \mu_1 = 0.5. \quad (6.27)$$

Начальные условия варьировались в окрестности начала координат фазового пространства системы уравнений (6.23). В частности, рассматривались варианты выбора начальных условий, соответствующих нулевым начальным амплитудам колебаний по первой доминантной моде и ненулевым начальным амплитудам колебаний по второй доминантной моде, например:

$$p_1(0) = 0, \quad q_1(0) = 0, \quad \beta(0) = 0, \quad p_2(0) = 1, \quad q_2(0) = 1.$$

Первоначально в качестве бифуркационного рассмотрим параметр  $N_1$ . Этот параметр характеризует угол наклона статической характеристики источника возбуждения колебаний.

Как мы уже отмечали ранее, основным практическим признаком существования хаотического аттрактора в системе является наличие в спектре ляпуновских характеристических показателей хотя бы одного положительного характеристического показателя. На рис. 6.2 показана зависимость максимального ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1$  от величины  $N_1$ . Как хорошо видно из рис. 6.2, существует ряд интервалов изменения параметра  $N_1$ , в которых величина  $\lambda_1$  является положительной. Следовательно, в этих интервалах у системы уравнений (6.23) существуют хаотические аттракторы.

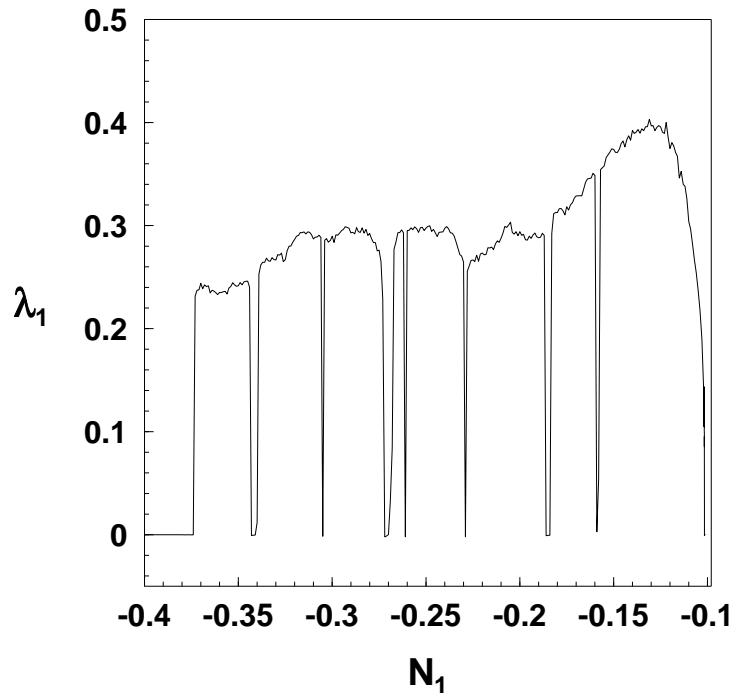


Рис. 6.2: Зависимость максимального ляпуновского показателя  $\lambda_1$  от параметра  $N_1$ .

Рассмотрим более детально переход от регулярных аттракторов системы (6.23) к хаотическим. Как показали проведенные численные расчеты, при  $-0.1 < N_1 \leq -0.05$  существуют устойчивые положения равновесия, координаты которых имеют значения:

$$p_1 = \text{const}; \quad q_1 = \text{const}; \quad \beta = \text{const}; \quad p_2 = q_2 = 0. \quad (6.28)$$

Таким образом, все устойчивые положения равновесия в окрестности начала координат фазового пространства, при  $-0.1 < N_1 \leq -0.05$ , имеют нулевые координаты по второй доминантной моде. При  $N_1 = -0.1$  это положение равновесия теряет устойчивость и в системе (6.23), в результате бифуркации Андронова-Хопфа, возникает своеобразный устойчивый предельный цикл с нулевой второй доминантной модой. То есть, предельный цикл вида:

$$p_1 = f_1(\tau), \quad q_1 = f_2(\tau), \quad \beta = f_3(\tau), \quad p_2 = 0, \quad q_2 = 0,$$

где  $f_1(\tau)$ ,  $f_2(\tau)$ ,  $f_3(\tau)$  некоторые периодические функции от  $\tau$ .

Начиная со значения  $N_1 = -0.10153$ , в системе возникает каскад бифуркаций удвоения периода предельных циклов. На рис. 6.3 приведены несколько первых бифуркаций этого каскада. Этот бесконечный каскад бифуркаций удвоения завершается возникновением хаотического аттрактора при  $N_1 = -0.101632$ . На рис. 6.4а–б приведены, соответственно, дву- и трехмерные проекции хаотического аттрактора, построенного при значении  $N_1 = -0.10164$ . Проекция, приведенная на рис. 6.4а, соответствует хаотическим колебаниям по первой моде. Переход к хаосу здесь происходит по сценарию Фейгенбаума. Отметим очень интересную особенность, заключающуюся в том, что все бифуркации каскада удвоения периода и сам хаотический аттрактор имеют нулевую вторую доминантную моду колебаний. Хаотический аттрактор имеет спиральную структуру. Изображающие точки траекторий аттрактора непредсказуемо блуждают по виткам его спиралей. Как видно из рис. 6.4б, построенный хаотический аттрактор очень похож на хаотические аттракторы, рассмотренные в главе 3 при изучении хаотических колебаний плоского маятника. В дальнейшем будем называть такие аттракторы одно-модовыми.

На рис. 6.4в–г приведено сечение Пуанкаре, плоскостью  $\beta = -1.55$ , хаотического аттрактора при  $N_1 = -0.10164$  и его отображение Пуанкаре по переменной  $q_1$ . Сечение Пуанкаре представляет собой хаотическое точечное множество, имеющее ленточную структуру. Отображение Пуанкаре может быть достаточно точно аппроксимировано одномерными кривыми. Таким образом, в этом случае исследование системы (6.23) может быть сведено к изучению одномерного дискретного отображения.

Заметим, что каскад бифуркаций удвоения происходит на очень малом по длине интервале изменения  $N_1$ . Еще меньшим является интервал существования одномодового хаотического аттрактора. Так, при  $N_1 = -0.10165$  одномодовый аттрактор исчезает и в системе возникает хаотический аттрактор совершенно иного типа. На рис. 6.5а–г приведены различные проекции

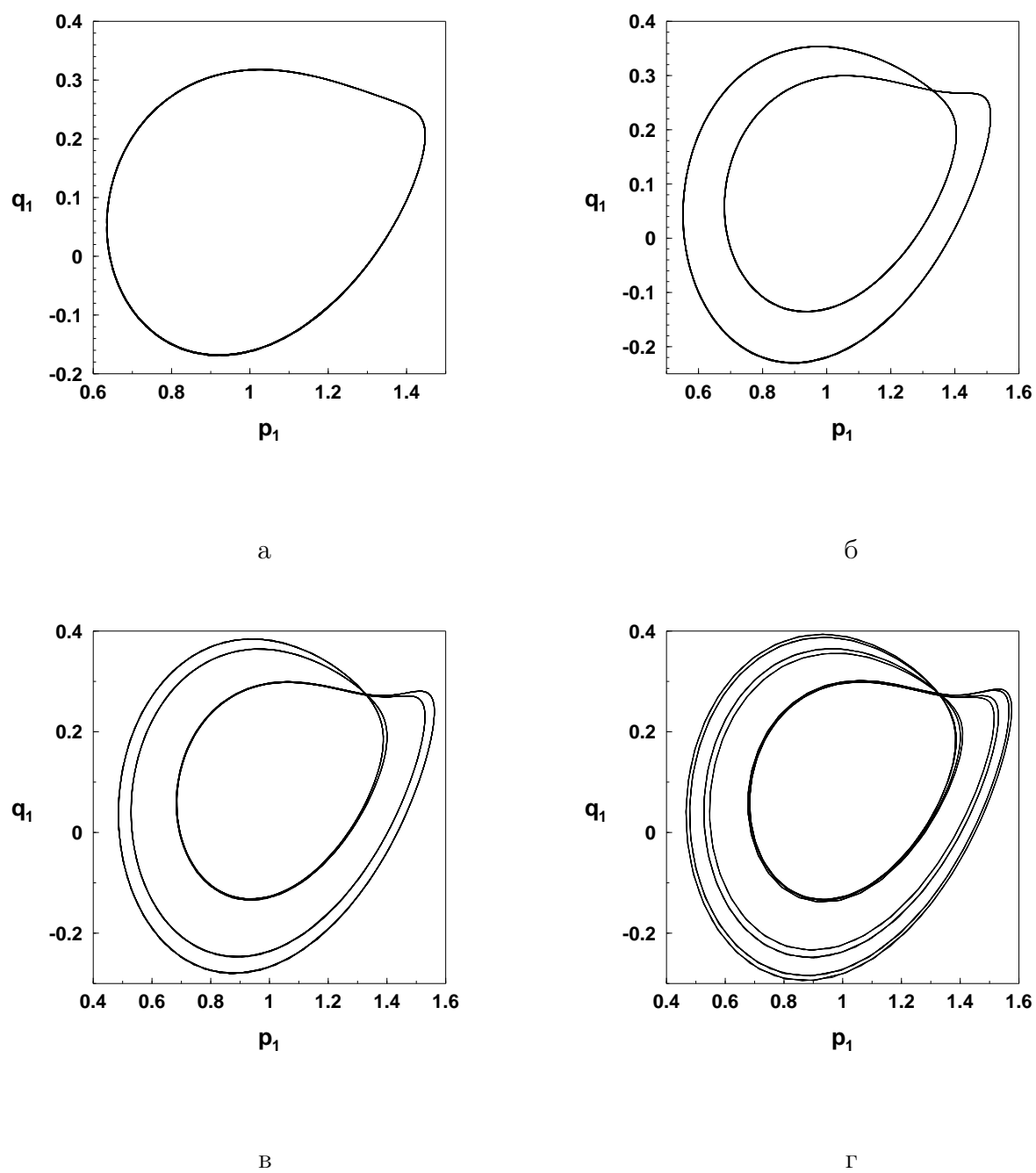
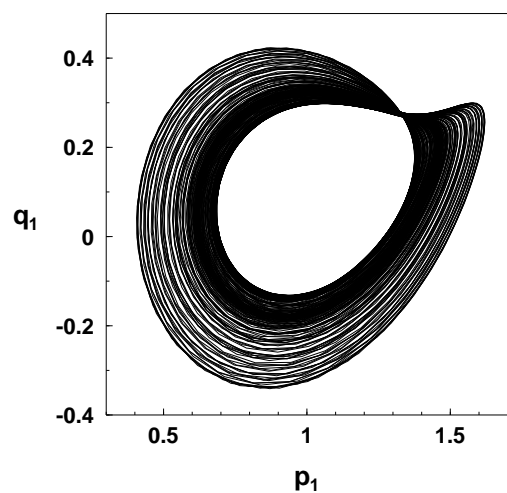
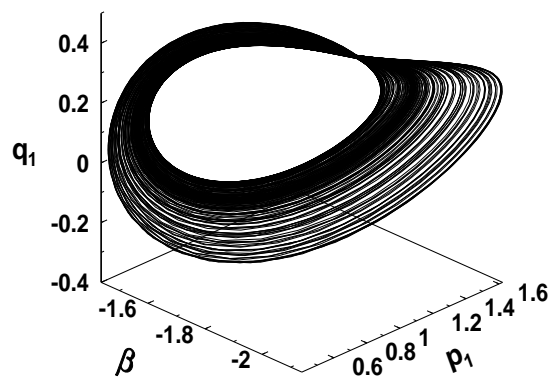


Рис. 6.3: Проекция каскада бифуркаций удвоения периода.

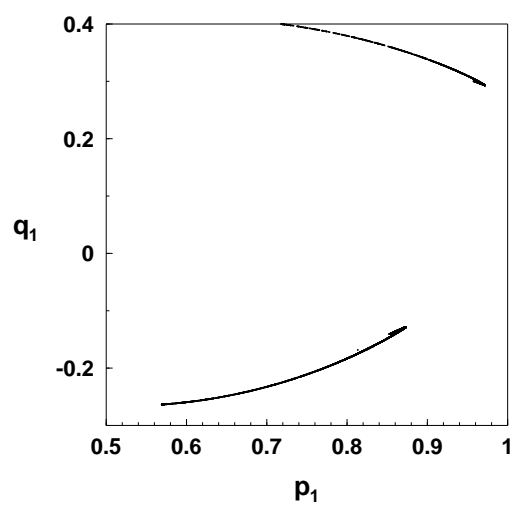




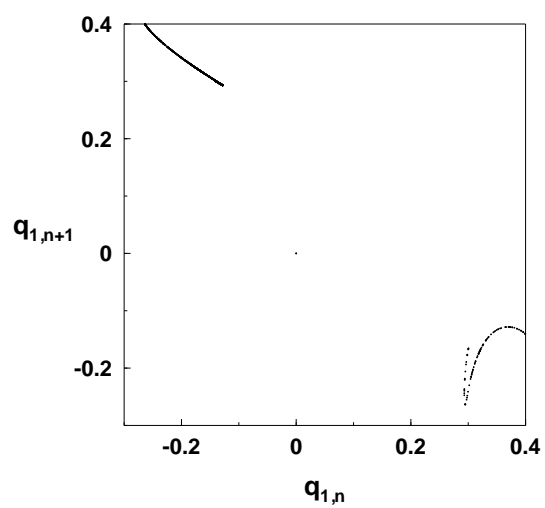
а



б

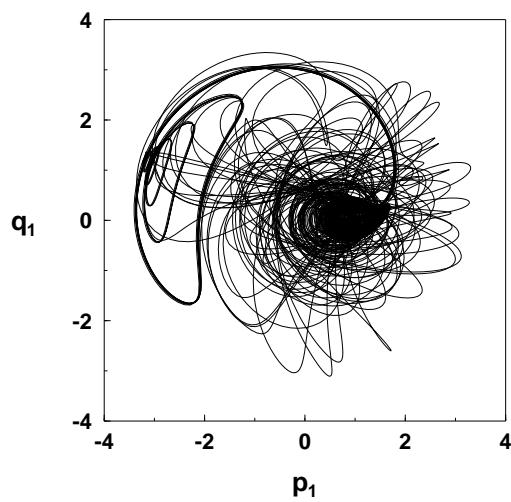


в

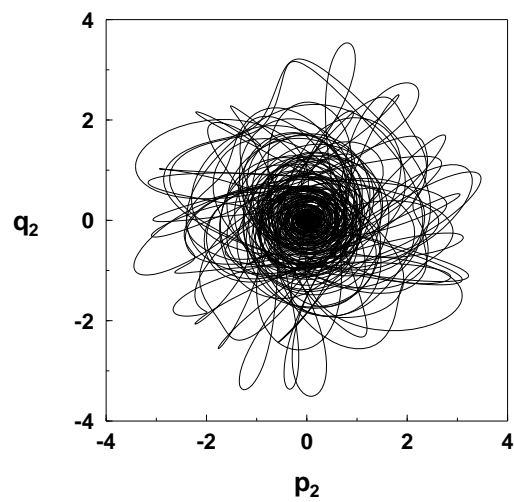


г

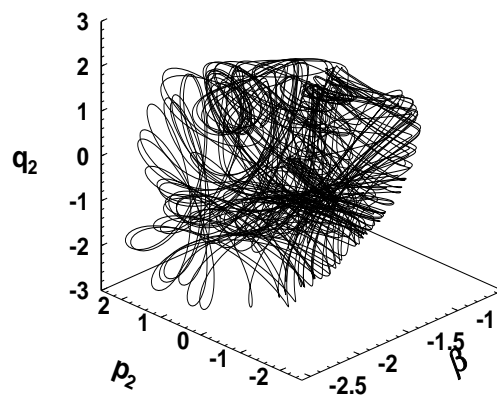
Рис. 6.4: Проекция хаотического аттрактора при  $N_1 = -0.10164$  (а-б), его сечение (в) и отображение Пуанкаре (г).



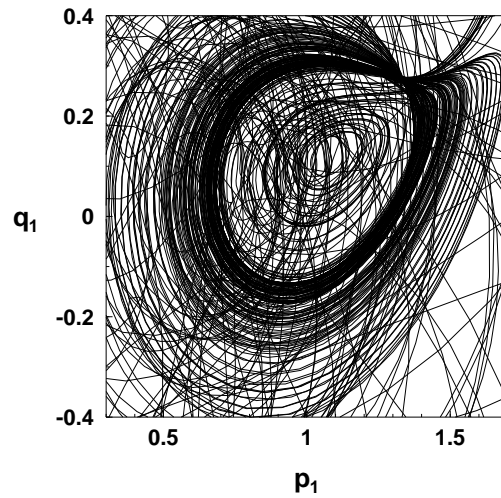
а



б



в



г

Рис. 6.5: Проекции хаотического аттрактора при  $N_1 = -0.10165$  (а-г).

хаотического аттрактора, который возникает в системе при  $N_1 = -0.10165$ . Прежде всего он отличается от одномодового аттрактора возбуждением колебаний по второй доминантной моде. В дальнейшем будем называть аттракторы такого типа двумодовыми. Кроме того, заметно, в несколько раз, возрастают амплитуды хаотических колебаний по первой доминантной моде. В связи с этим в несколько раз возрастает объем области фазового пространства, в которой локализованы траектории возникшего хаотического аттрактора. Так, на рис. 6.5а можно заметить небольшую густо затемненную область в окрестности точки  $(1,0)$ . Эта затемненная область приблизительно соответствует области локализации в фазовом пространстве исчезнувшего одномодового аттрактора.

На рис. 6.5г приведен увеличенный фрагмент проекции хаотического аттрактора в окрестности точки  $(1,0)$ . Внимательное изучение этого фрагмента позволяет обнаружить заметное сходство с соответствующей проекцией одномодового аттрактора (рис. 6.4а). Это проясняет механизм возникновения двумодового хаотического аттрактора, который возникает в результате перемежаемости между исчезнувшим хаотическим одномодовым аттрактором и седловым предельным циклом существовавшим по соседству с областью локализации в фазовом пространстве одномодового хаотического аттрактора. При  $N_1 = -0.10165$  одномодовый аттрактор и седловой цикл исчезают и в системе (6.23) возникает новый хаотический аттрактор, движение траекторий по которому включает три фазы: ламинарную, турбулентную и еще одну, которую назовем грубо-ламинарной. Ламинарной фазе соответствуют близкие к периодическим движения в окрестности исчезнувшего предельного цикла (см. густо прочерченные траектории слева вверху на рис. 6.5а). В непредсказуемый наперед момент времени происходит турбулентный всплеск и траектории уходят в область исчезнувшего одномодового хаотического аттрактора (густо затемненная область в окрестности точки  $(1,0)$  на рис. 6.5г). Далее, в течение достаточно длительного времени, траектории совершают хаотические блуждания вдоль витков исчезнувшего одномодового хаотиче-

ского аттрактора. По аналогии с терминологией, введенной в статистической физике [42, 68, 161], назовем эту фазу движений грубо-ламинарной. В дальнейшем, в непредсказуемый момент времени, происходит новый турбулентный всплеск и траектории возвращаются в область исчезнувшего предельного цикла. Вышеописанный процесс повторяется бесконечное число раз. Таким образом, имеет место перемежаемость, отличная от классических типов, рассмотренных Помо и Манневиллем. Отметим, что возникновение двумодового хаотического аттрактора сопровождается с более чем трехкратным увеличением величины максимального ляпуновского характеристического показателя системы (6.23) с значения 0.023 до значения 0.075.

На рис. 6.6 приведены проекции сечения Пуанкаре, плоскостью  $\beta = -1.55$ , и отображения Пуанкаре (по одной из фазовых переменных) двумодового хаотического аттрактора при  $N_1 = -0.10165$ . Как видно из рисунков, сечение Пуанкаре утрачивает ленточную структуру, которая существовала в сечении одномодового аттрактора, и приобретает вид некоторого хаотического точечного множества. Однако внимательный взгляд на рис. 6.6а позволяет заметить, что составной частью сечения Пуанкаре двумодового хаотического аттрактора является лента исчезнувшего одномодового аттрактора. Такая же закономерность присуща и отображению Пуанкаре двумодового аттрактора. Составной частью этого отображения являются жирно прорисованные "кривые", "воспоминания" об исчезнувшем одномодовом хаотическом аттракторе. Естественно, что для двумодового хаотического аттрактора невозможна какая-либо одномерная дискретная аппроксимация.

Следует отметить, что возникновение одномодовых хаотических аттракторов является результатом учета взаимодействия колебательной системы с источником ее возбуждения. При неограниченной мощности источника хаотические одномодовые режимы в системе (6.23) невозможны.

Двумодовые хаотические аттракторы существуют на значительно большем по длине отрезке изменения параметра  $N_1$ , а именно  $-0.373 \leq N_1 \leq -0.10165$ . Этот отрезок соответствует области, в которой, как видно из

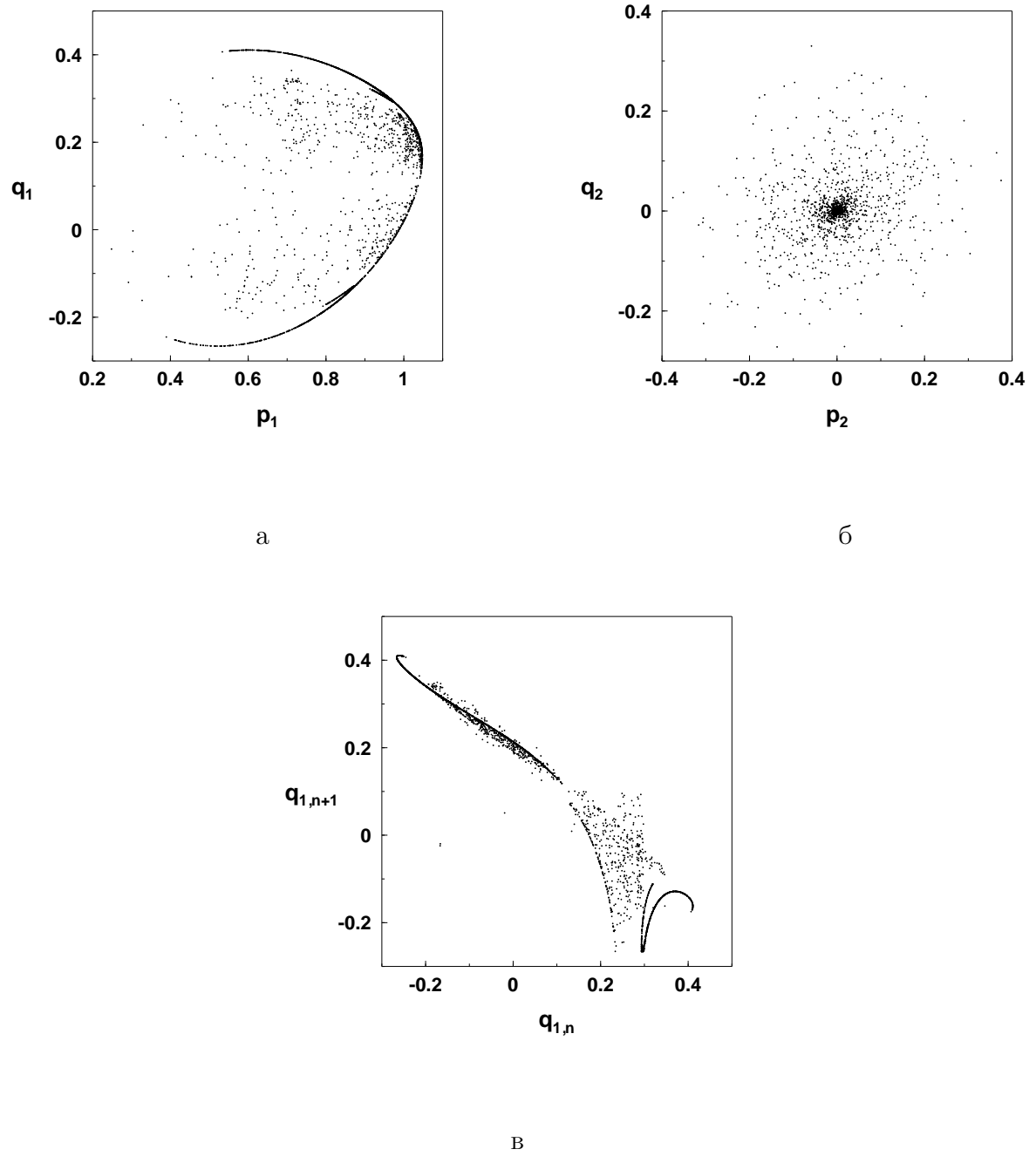
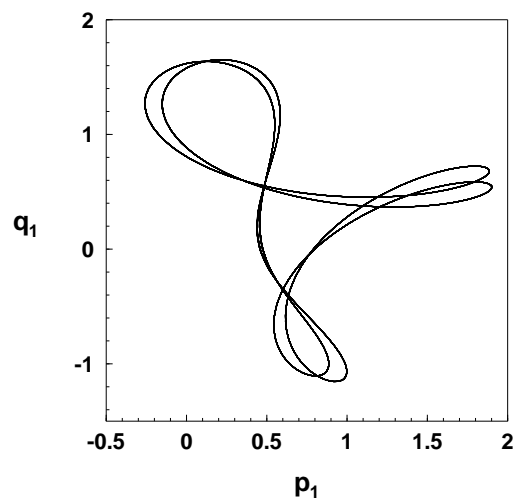


Рис. 6.6: Проекция сечения (а–б) и отображение Пуанкаре (в) хаотического аттрактора при  $N_1 = -0.10165$ .

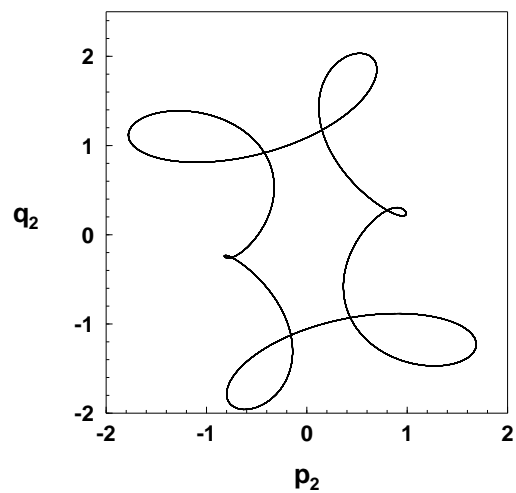
рис. 6.2, система (6.23) имеет положительный максимальный характеристический показатель. Однако на рис. 6.2 четко виден ряд подходов графика характеристического показателя к нулевому значению. Небольшие интервалы, в которых характеристический показатель равен нулю, соответствуют "окнам периодичности" в области хаоса. В этих окнах в системе существуют устойчивые предельные циклы.

Рассмотрим поведение системы (6.23) при прохождении одного из окон периодичности. Например, при  $N_1 = -0.271$  в системе существует предельный цикл, проекции фазового портрета которого приведены на рис. 6.7. При  $N_1 = -0.269$  предельный цикл исчезает и в результате перемежаемости первого типа в системе возникает хаотический аттрактор. Проекция фазового портрета по двум модам колебаний такого аттрактора, построенного для  $N_1 = -0.268$ , приведены на рис. 6.7в–г. Соответственно на рис. 6.8 приведены проекции сечения Пуанкаре, плоскостью  $\beta = -1.35$ , отображение Пуанкаре по переменной  $q_1$  и трехмерная проекция фазового портрета хаотического аттрактора. Несмотря на то, что возникший хаотический аттрактор является двумодовым, проекции его сечения Пуанкаре имеют квазиленточную структуру, более характерную для одномодовых хаотических аттракторов. Как видно из рис. 6.8в, и в этом случае возможна, правда достаточно грубая, аппроксимация динамики задачи при помощи дискретного одномерного отображения.

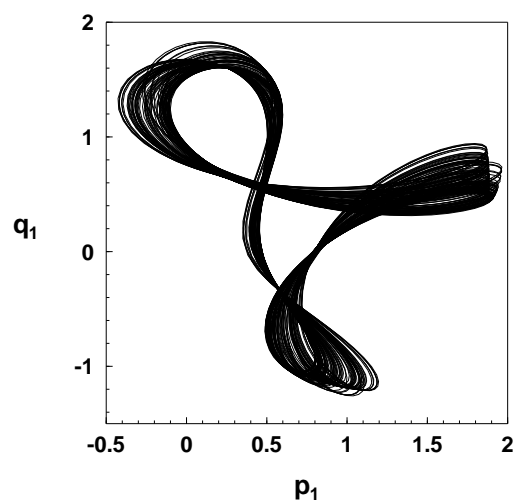
При увеличении  $N_1$  от значения  $-0.268$  в системе возникает более сложный двумодовый хаотический аттрактор. На рис. 6.9а–г приведены, соответственно, проекции фазового портрета и сечения Пуанкаре аттрактора такого типа, построенные при  $N_1 = -0.25$ . А на рис. 6.10а–б приведены отображение Пуанкаре и трехмерная проекция фазового портрета такого хаотического аттрактора. Из приведенных рисунков наглядно видно значительное изменение и усложнение структуры проекций фазового портрета данного хаотического аттрактора по сравнению с хаотическим аттрактором при  $N_1 = -0.268$ . Проекция сечения Пуанкаре (рис. 6.9в–г) полностью утрачивают квазиленточную



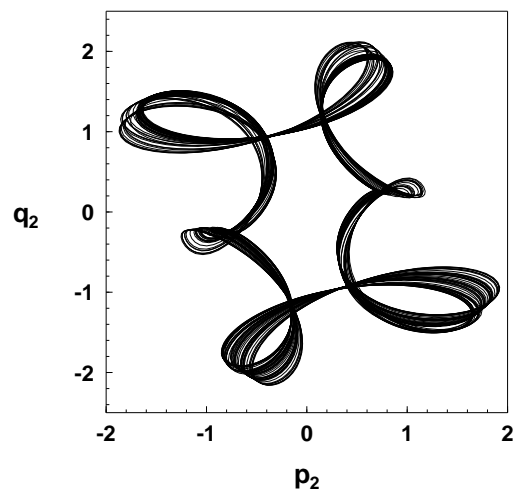
а



б

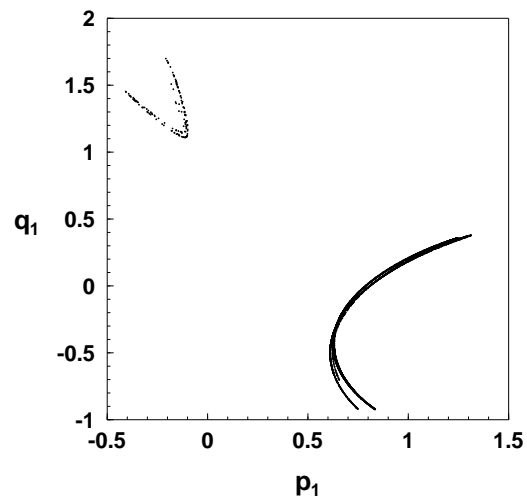


в

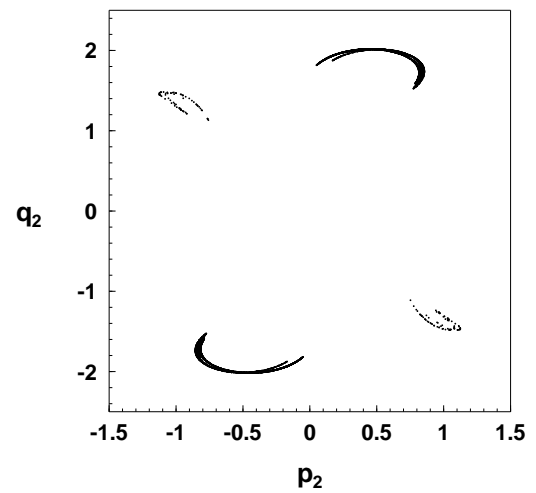


г

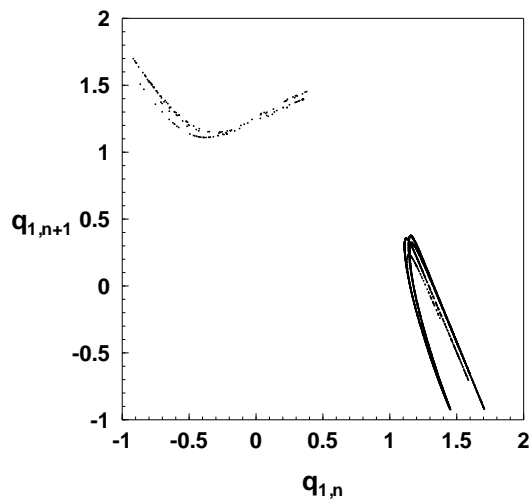
Рис. 6.7: Проекции предельного цикла при  $N_1 = -0.271$  (а-б) и хаотического аттрактора при  $N_1 = -0.268$  (в-г).



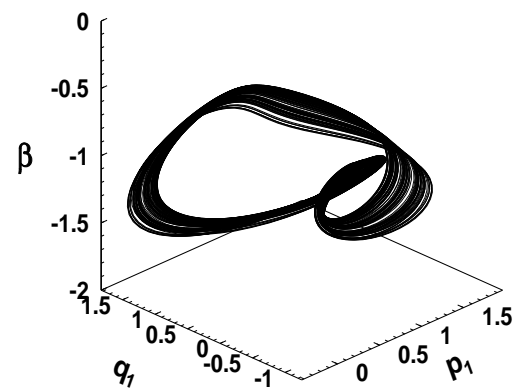
а



б



в



г

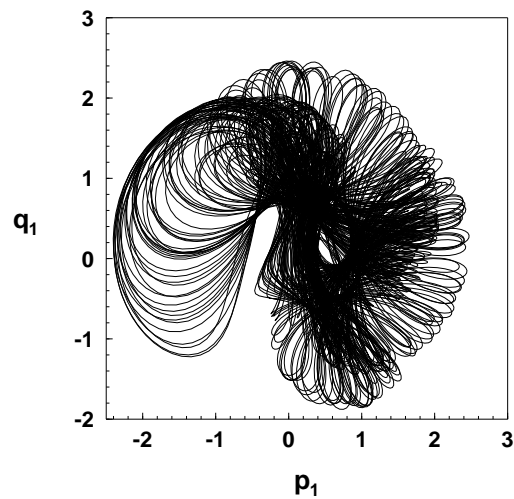
Рис. 6.8: Проекция сечения Пуанкаре, плоскостью  $\beta = -1.35$ , хаотического аттрактора при  $N_1 = -0.271$  (а-б), отображение Пуанкаре (в) и трехмерная проекция фазового портрета (г).



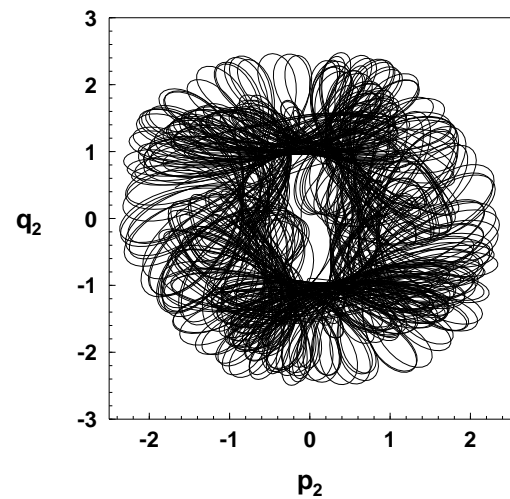
структуру и приобретают вид некоторого развитого хаотического точечного множества. Невозможной в этом случае становится какая-либо одномерная аппроксимация отображения Пуанкаре. Развитые хаотические аттракторы типа, приведенного на рис. 6.9–6.10, являются наиболее типичными для системы (6.23). Они существуют при преобладающем большинстве значений  $N_1$  из отрезка  $[-0.373, -0.10165]$ .

Рассмотрим теперь бифуркации, происходящие в системе (6.23), когда управление статической характеристикой электродвигателя приводит к изменению величины  $N_3$  (мультипараметр, который зависит от частоты основного тона колебаний свободной поверхности жидкости и от характеристик электродвигателя). Предположим, что  $N_1 = -1$ , а величины  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$ ,  $\mu_1$  остаются такими же, как в (6.25)–(6.27). На рис. 6.11 показана зависимость максимального ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1$  от величины  $N_3$ . Анализ данных, по которым построен рис. 6.11, показывает, что при  $-1.6 < N_3 < -0.394$  имеется несколько интервалов, в которых показатель  $\lambda_1$  положителен. Следовательно, в этих интервалах у системы уравнений (6.23) существуют хаотические аттракторы. Как видно из рис. 6.11, интервалы, в которых существуют хаотические аттракторы, чередуются с узкими "окнами" периодичности.

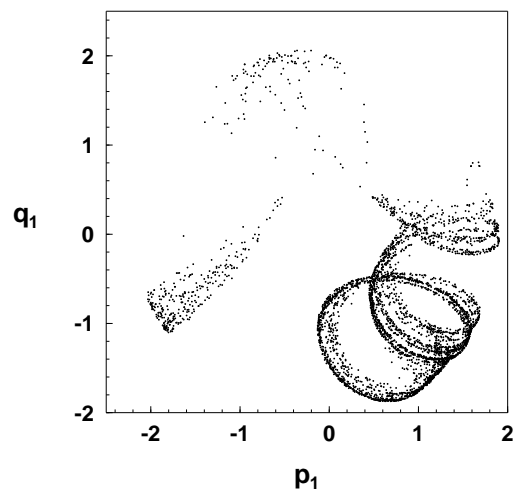
Изучим некоторые особенности перехода к хаосу при изменении значения  $N_3$ . Так, при  $N_3 = -0.38$  в системе существует устойчивый предельный цикл. При уменьшении значений  $N_3$  начинается бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода, который заканчивается возникновением хаотического аттрактора при  $N_3 \approx -0.395$ . Возникший хаотический аттрактор существует на очень малом интервале изменения  $N_3$  и уже при  $N_3 = -0.39504$  в результате перемежаемости сменяется хаотическим аттрактором другого типа. Вновь возникший хаотический аттрактор существует уже на значительно большем интервале изменения  $N_3$ , а именно,  $-0.5 < N_3 \leq -0.39504$ . Данная ситуация напоминает рассмотренную ранее при изучении бифуркаций по параметру  $N_1$ , причем также у правого порога существования хаоса. Однако в послед-



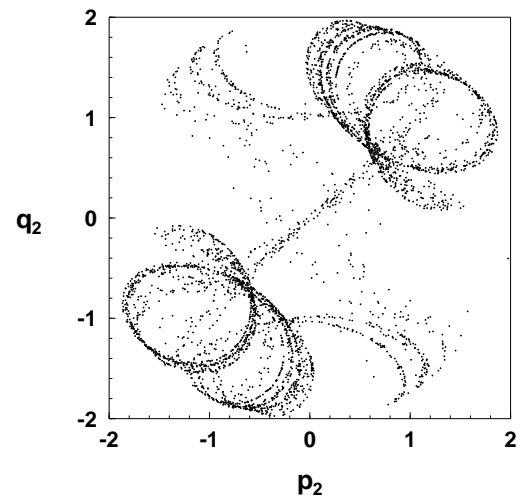
а



б



в



г

Рис. 6.9: Проекция фазового портрета (а-б) и сечения Пуанкаре, плоскостью  $\beta = -1.35$ , (в-г) хаотического аттрактора при  $N_1 = -0.25$ .

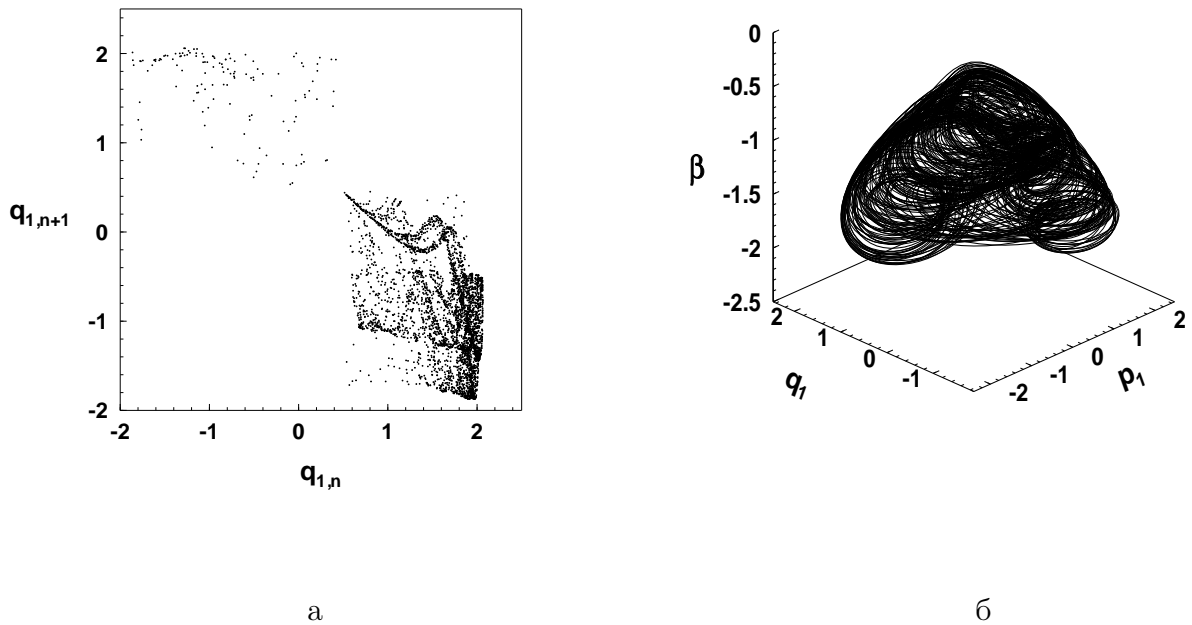


Рис. 6.10: Отображение Пуанкаре (а) и трехмерная проекция фазового портрета (б) хаотического аттрактора при  $N_1 = -0.25$ .

нем случае имеется одно существенное отличие. Как предельные циклы, так и возникающий по сценарию Фейгенбаума хаотический аттрактор не являются одномодовыми. У них присутствуют колебания по обоим доминантным модам.

На рис. 6.12а–б приведены проекции фазовых портретов хаотических аттракторов построенных, соответственно, при  $N_3 = -0.39503$  и  $N_3 = -0.39504$ . Хаотический аттрактор, приведенный на рис. 6.12б, отличается от хаотического аттрактора, приведенного на рис. 6.12а, заметным увеличением амплитуд колебаний по обоим доминантным модам. Это приводит к существенному увеличению объема области в фазовом пространстве, в которой локализуется возникший аттрактор. На рис. 6.12в–г приведены эти проекции в увеличенном масштабе. Как хорошо видно из этих рисунков, фрагмент проекции хаотического аттрактора при  $N_3 = -0.39504$  качественно подобен хаотическому аттрактору при  $N_3 = -0.39503$ . Эти рисунки проясняют меха-

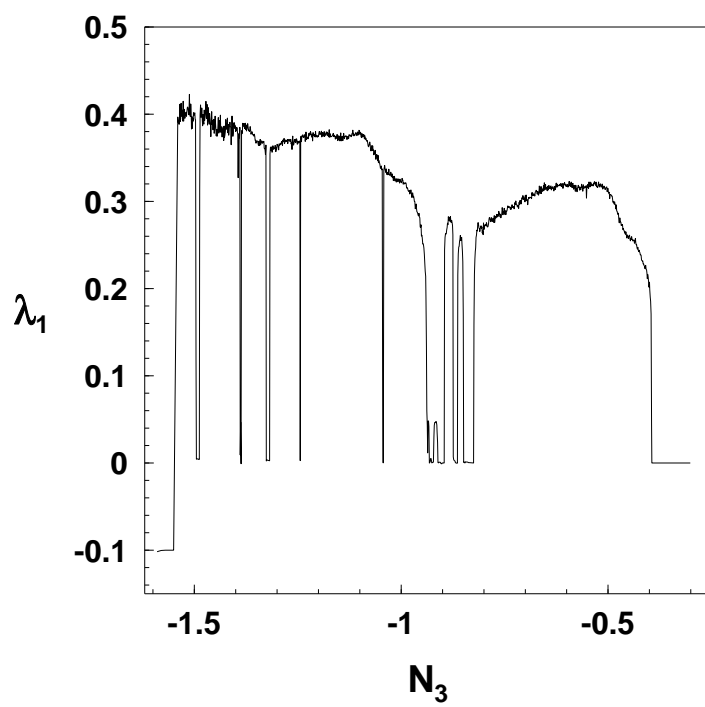


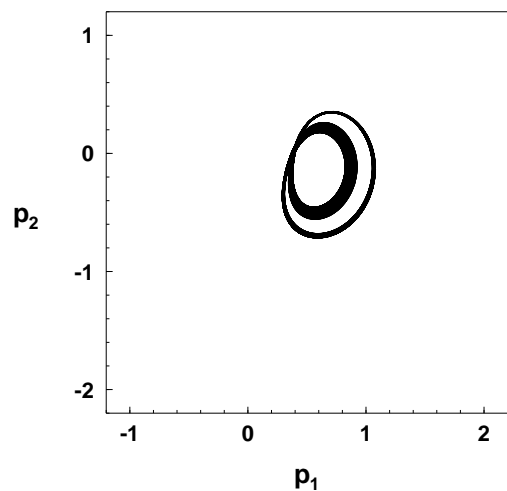
Рис. 6.11: Зависимость максимального ляпуновского показателя  $\lambda_1$  от параметра  $N_3$ .

низм перемежаемости при возникновении одного аттрактора из другого. В точке бифуркации хаотический аттрактор с рис. 6.12а исчезает и в системе (6.23) возникает аттрактор нового типа, движение траекторий по которому состоит из двух фаз. Одну из них, которую, как и ранее, будем называть грубо-ламинарной, представляют хаотические блуждания траекторий возникшего аттрактора в окрестностях траекторий исчезнувшего аттрактора. В непредсказуемый момент времени траектории "срываются" и уходят в отдаленные области фазового пространства. Это турбулентная фаза движений траекторий. Затем траектории вновь возвращаются в область исчезнувшего аттрактора. Этот процесс повторяется бесконечное число раз.

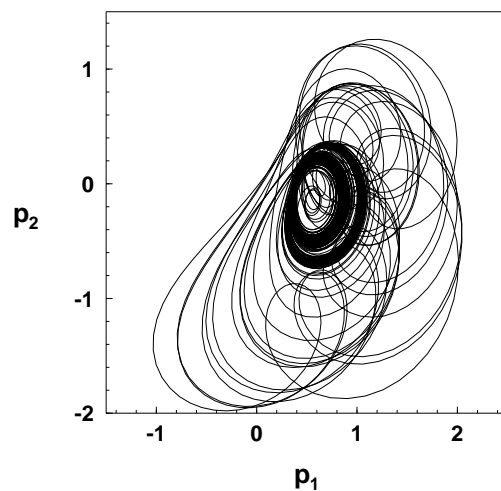
На рис. 6.13а–б приведены проекции распределения инвариантной меры по фазовым портретам хаотических аттракторов при  $N_3 = -0.39503$  (рис. 6.13а) и при  $N_3 = -0.39504$  (рис. 6.13б). На рис. 6.13б густо затемненные участки соответствуют грубо-ламинарной фазе перемежаемости, а более светлые турбулентным всплескам. Из этого рисунка отчетливо видно, что длительность грубо-ламинарной фазы значительно превышает длительность турбулентной фазы. Распределение инвариантной меры по фазовому портрету хаотического аттрактора на рис. 6.13а является достаточно равномерным, что характерно для хаотических аттракторов, возникших по сценарию Фейгенбаума. Здесь также хорошо видно качественное подобие рис. 6.13а и рис. 6.13б, показывающее, что исчезающий хаотический аттрактор служит "основанием" грубо-ламинарной фазы возникающего аттрактора.

На рис. 6.13в–г приведены сечения Пуанкаре, плоскостью  $\beta = -0.5$ , этих аттракторов. Оба сечения Пуанкаре являются точечными хаотическими множествами. Одно из сечений (рис. 6.13г), в качестве фрагмента, содержит множество, качественно подобное второму сечению (рис. 6.13в), что лишний раз подтверждает наличие в системе перемежаемости типа "хаос–хаос". Таким образом, здесь также реализуется перемежаемость, отличная от классических сценариев Помо-Манневилля.

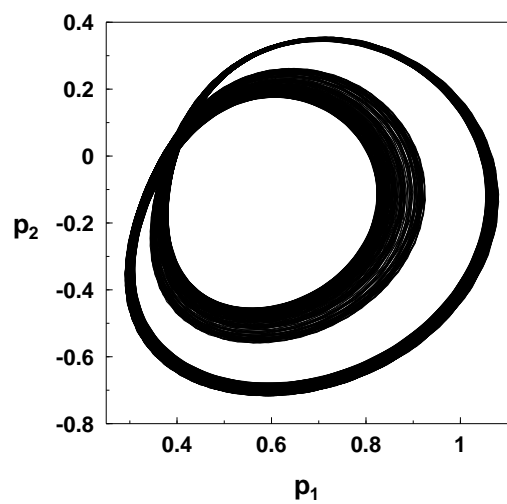
Далее более детально рассмотрим поведение системы при прохожде-



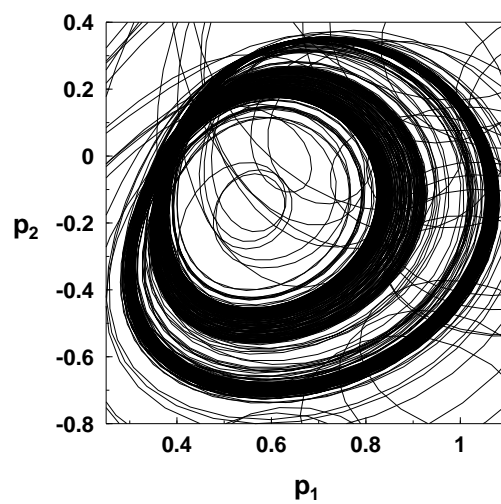
а



б

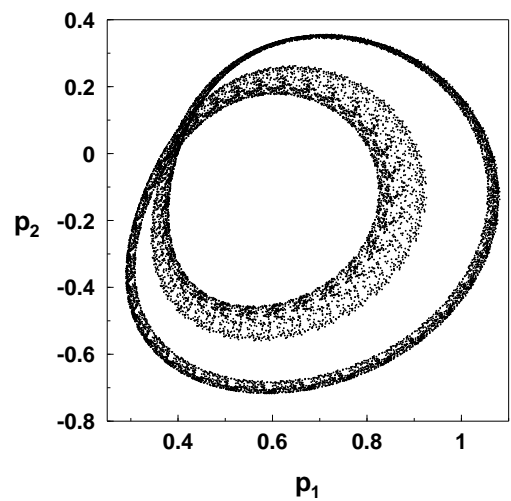


в

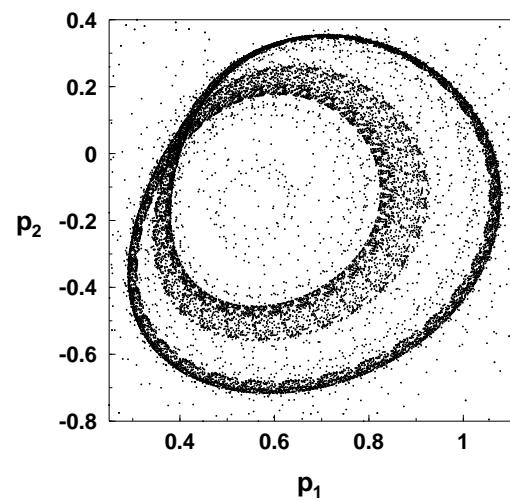


г

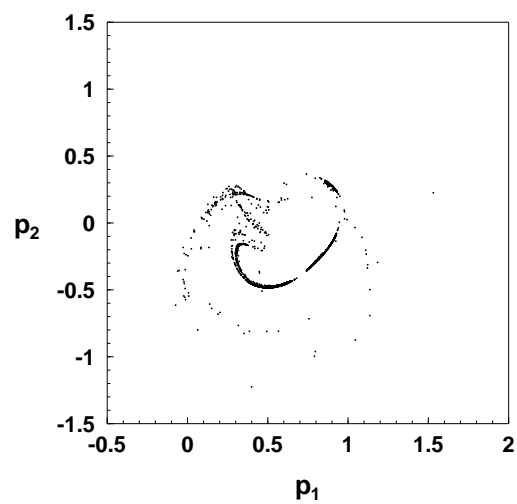
Рис. 6.12: Проекция фазовых портретов хаотических аттракторов при  $N_3 = -0.39503$  (а, в) и при  $N_3 = -0.39504$  (б, г).



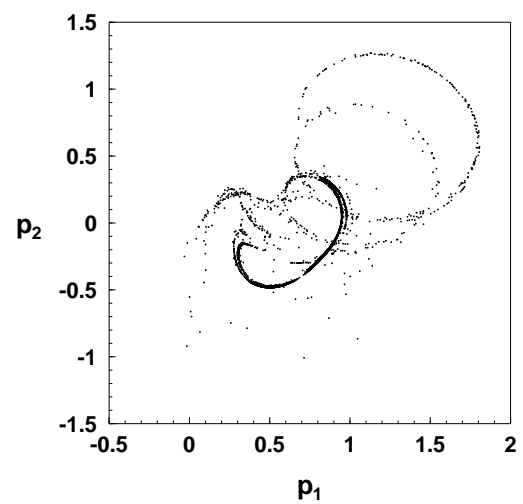
а



б



в



г

Рис. 6.13: Проекции распределений инвариантной меры и сечений Пуанкаре хаотических аттракторов при  $N_3 = -0.39503$  (а, в) и при  $N_3 = -0.39504$  (б, г).

нии параметра  $N_3$  через окно периодичности. Предположим, что  $N_3 \in [-0.828, -0.825]$ . В этом окне периодичности аттрактором системы является предельный цикл. На рис. 6.14а–б приведены, соответственно, проекции фазового портрета и сечение Пуанкаре цикла, построенного при значении  $N_3 = -0.825$ . Наблюдается структура, типичная для предельных циклов (замкнутость траектории в фазовом пространстве и конечность точек в сечении Пуанкаре). При небольшом увеличении  $N_3$  предельный цикл исчезает и в системе (6.23) возникает хаотический аттрактор. На рис. 6.14в–г приведены проекции фазового портрета и распределение инвариантной меры Крылова–Боголюбова по фазовому портрету хаотического аттрактора, построенные при  $N_3 = -0.824$ . Последний рисунок является хорошей иллюстрацией типа перехода от регулярного аттрактора к хаотическому. На рис. 6.14г отчетливо просматривается густо прочерченная область, практически совпадающая с исчезнувшим предельным циклом. Она является ламинарной фазой перемежаемости "предельный цикл – хаос". Соответственно более светлые участки характеризуют турбулентную фазу этой перемежаемости.

На рис. 6.15 приведены проекция сечения Пуанкаре, плоскостью  $\beta = -1.35$ , и отображение Пуанкаре хаотического аттрактора при  $N_3 = -0.824$ . Оба они представляют собой развитые хаотические точечные множества. Возникший хаотический аттрактор является двумодовым. Аттракторы такого типа являются наиболее характерными для системы (6.23). Они существуют для большинства значений  $N_3$  из области хаоса, определенной на основании анализа рис. 6.11. В частности, хаотические аттракторы такого типа существуют у левой границы хаотической области, определенной по рис. 6.11. При прохождении в сторону уменьшения параметром  $N_3$  этой границы ( $N_3 \approx -1.544505$ ) хаотический аттрактор исчезает и аттрактором системы становится положение равновесия вида  $p_1 = \text{const}$ ,  $q_1 = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$ ,  $p_2 = q_2 = 0$ . Характерным для таких положений равновесия является равенство нулю переменных второй доминантной моды. Так, для значения  $N_3 = -1.544506$  положение равновесия имеет следующие координаты



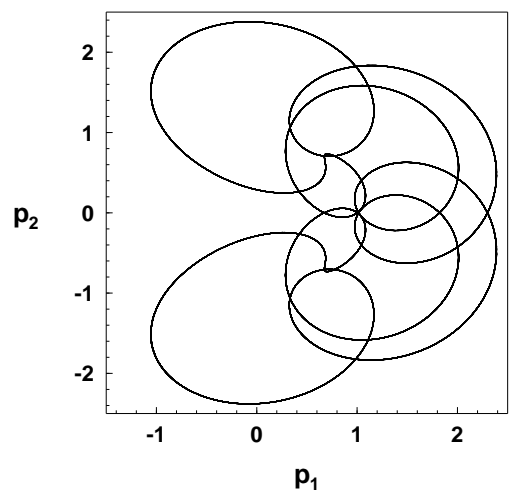
наты:

$$p_1 = 0.84; \quad q_1 = 0.07; \quad \beta = -1.58; \quad p_2 = q_2 = 0. \quad (6.29)$$

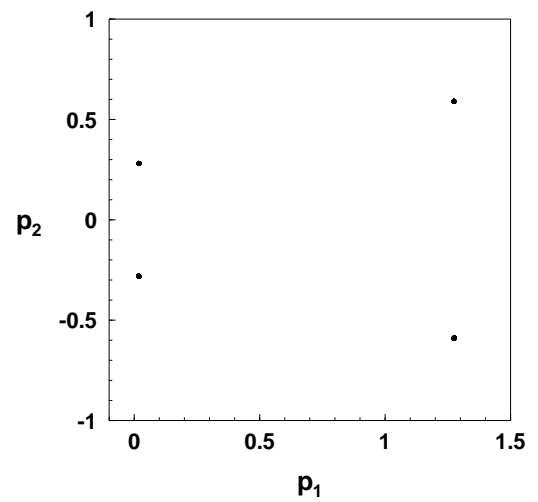
В заключение параграфа рассмотрим некоторые бифуркации системы (6.23), происходящие при изменении параметра  $\alpha$  (коэффициента демпфирования). Предположим, что  $N_1 = N_3 = -1$ , а значения величин  $A$ ,  $B$ ,  $\mu_1$  такие же, как в (6.25), (6.27). На рис. 6.16 приведена зависимость максимального ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1$  от коэффициента демпфирования  $\alpha$ . На последнем рисунке четко видны интервалы положительности характеристического показателя. В этих интервалах система имеет хаотические аттракторы. Как и в предыдущих случаях, интервалы хаотичности чередуются с очень малыми интервалами, в которых максимальный характеристический показатель равен нулю. Это окна периодичности в хаосе, в которых аттракторами системы (6.23) будут предельные циклы.

При  $\alpha = -0.3115$  в системе существует устойчивый предельный цикл. При возрастании  $\alpha$ , начиная со значения  $\alpha = -0.311$ , в системе происходит бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода, который завершается возникновением хаотического аттрактора при  $\alpha \approx -0.3109$ . Снова наблюдается достаточно типичная для этой задачи закономерность: переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума реализуется на очень малом интервале изменения параметра, в данном случае на интервале  $(-0.311, -0.3109)$ . На рис. 6.17 приведены первые бифуркации каскада удвоения. В свою очередь, на рис. 6.18 приведены проекции возникшего по сценарию Фейгенбаума хаотического аттрактора, а также сечение и отображение Пуанкаре данного аттрактора. Как видно из рис. 6.18, в данном случае сечение и отображение Пуанкаре имеют четкую ленточную структуру и могут быть аппроксимированы с помощью одномерных кривых.

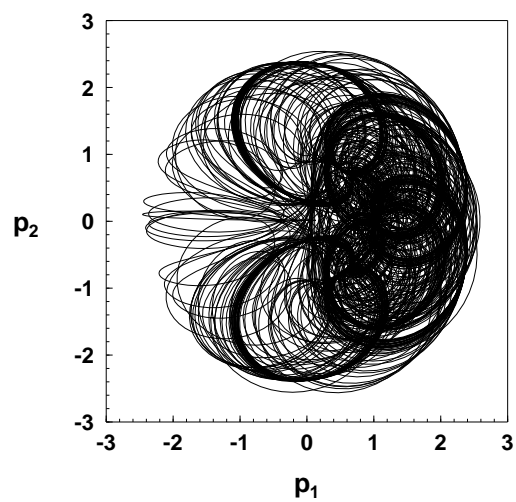
Вышеописанный сценарий перехода к хаосу повторяется при прохождении параметром  $\alpha$  правой границы окна периодичности. Всюду каскад би-



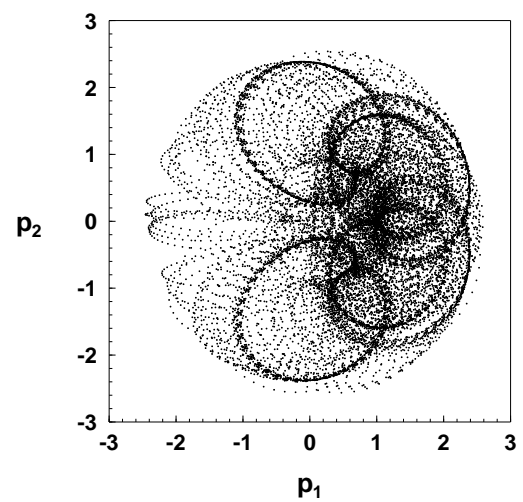
а



б



в



г

Рис. 6.14: Проекция фазового портрета и сечения Пуанкаре предельного цикла при  $N_3 = -0.825$  (а–б); проекция фазового портрета и распределения инвариантной меры хаотического аттрактора при  $N_3 = -0.824$  (в–г).

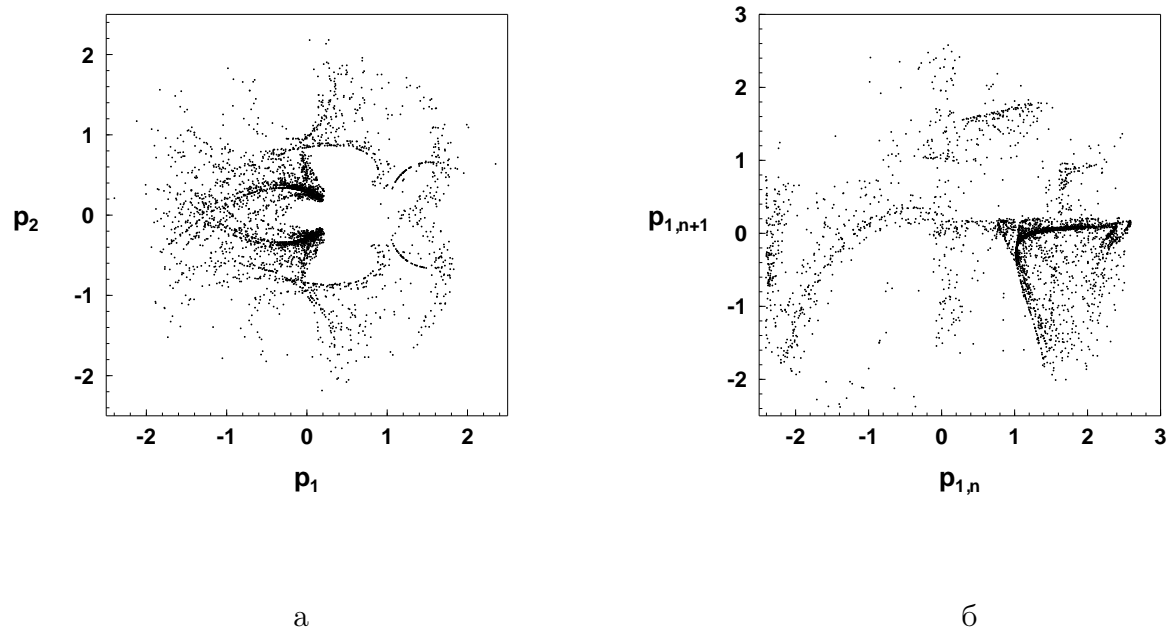


Рис. 6.15: Проекция сечения и отображения Пуанкаре хаотического аттрактора при  $N_3 = -0.824$  (а-б).

фуркаций удвоения происходит на очень малом интервале изменения параметра. Возникающие в результате каскада бифуркаций удвоения хаотические аттракторы при этом подобны приведенному на рис. 6.18. Далее на всех интервалах хаотичности повторяется следующая закономерность. При удалении  $\alpha$  от правой границы окна периодичности хаотический аттрактор становится более "развитым". Его траектории начинают заполнять все пустоты, которые имеются на рис. 6.18а-б. При этом сечения Пуанкаре утрачивают ленточную структуру и приобретают вид достаточно сложных хаотических точечных множеств. Иллюстрацией этого служит рис. 6.19. На этом рисунке приведены различные характеристики хаотического аттрактора, построенного при  $\alpha = -0.15$ , то есть примерно посередине интервала хаотичности (см. рис. 6.16).

Отметим, что структура фазового портрета хаотического аттрактора, приведенного на последнем рисунке, является наиболее типичной для хаотических аттракторов, которые существуют в системе (6.23). Практически

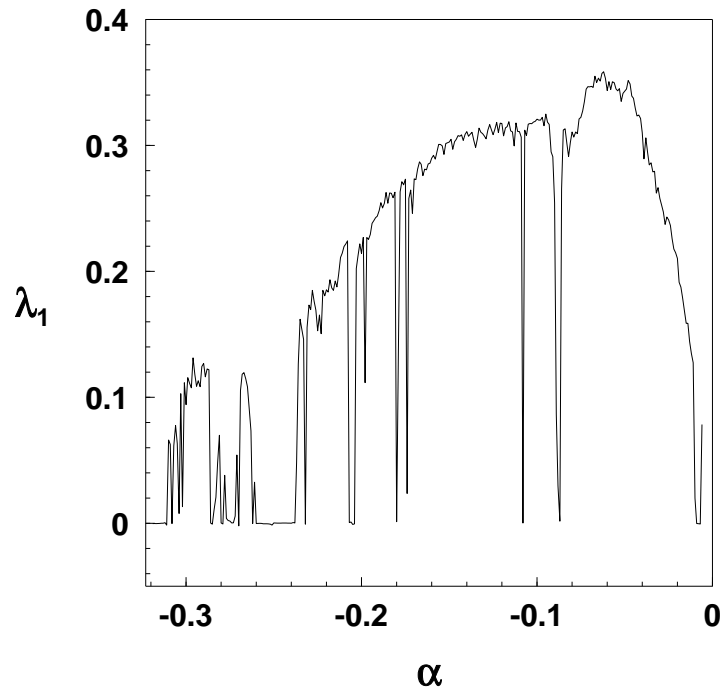
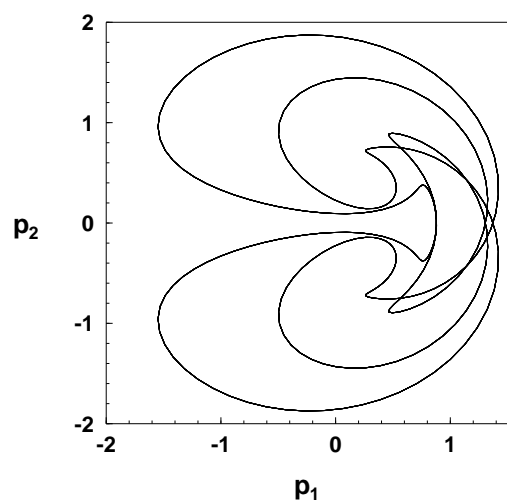
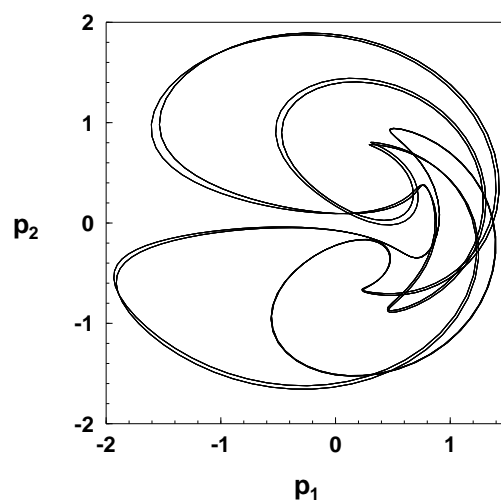


Рис. 6.16: Зависимость максимального ляпуновского показателя  $\lambda_1$  от параметра  $\alpha$ .

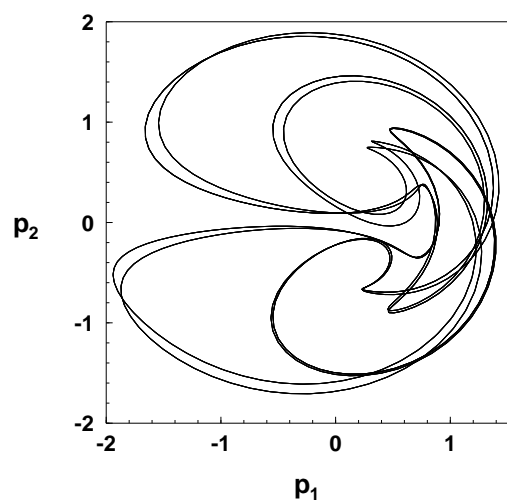
аттракторы с подобным фазовым портретом всегда встречаются при обнаружении хаоса, в случае когда бифуркационный параметр находится в некотором отдалении от границы окна периодичности. Однако похожесть фазовых портретов не влечет за собой похожесть сечений и отображений Пуанкаре. Действительно, рассмотрим хаотический аттрактор, построенный при значении  $\alpha = -0.188$ . Как видно из рис. 6.16, это значение  $\alpha$ , как и  $\alpha = -0.15$  находится достаточно далеко от границ ближайших к нему окон периодичности. Проекция фазового портрета хаотического аттрактора, существующего в системе, при  $\alpha = -0.188$  практически неотличима от соответствующих проекций хаотического аттрактора при  $\alpha = -0.15$ . Поэтому здесь не приводятся эти проекции. Для наглядного представления фазового портрета хаотического аттрактора при  $\alpha = -0.188$  достаточно взглянуть на рис. 6.19а–б. А вот сечения и отображения Пуанкаре аттракторов при  $\alpha = -0.15$  и  $\alpha = -0.188$ ,



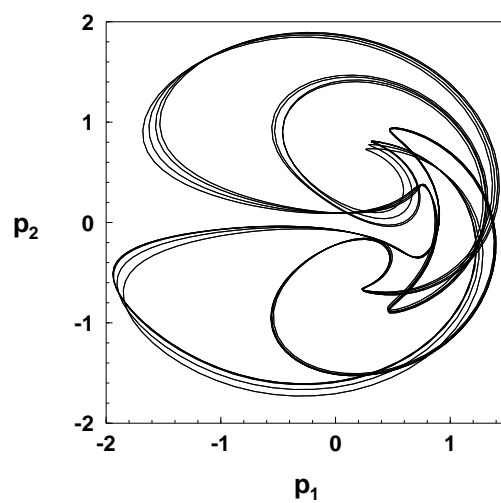
а



б



в



г

Рис. 6.17: Проекция каскада бифуркаций удвоения периода.

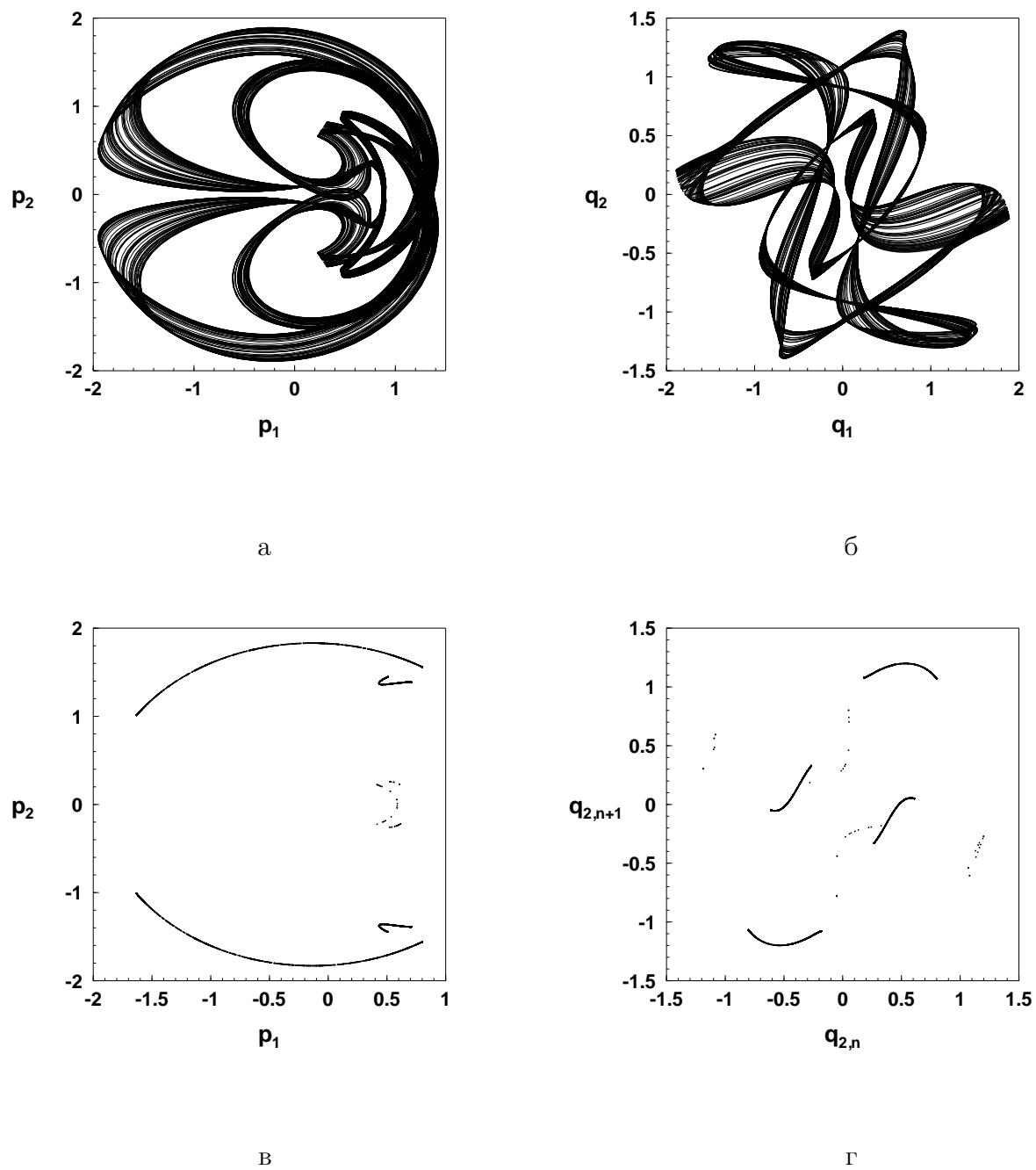
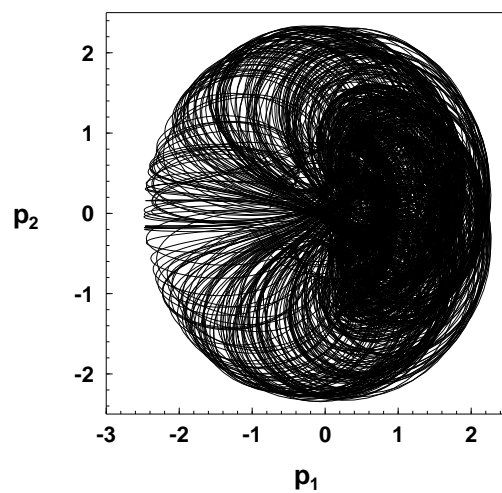
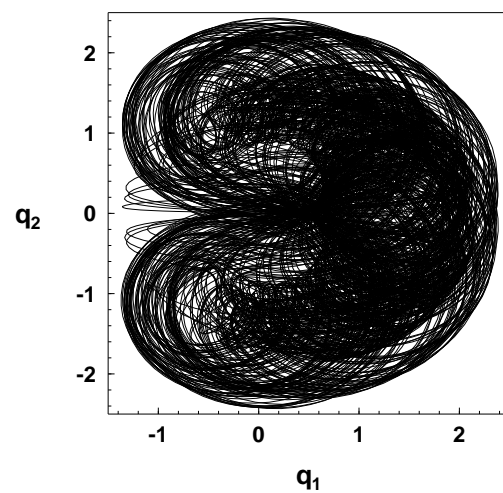


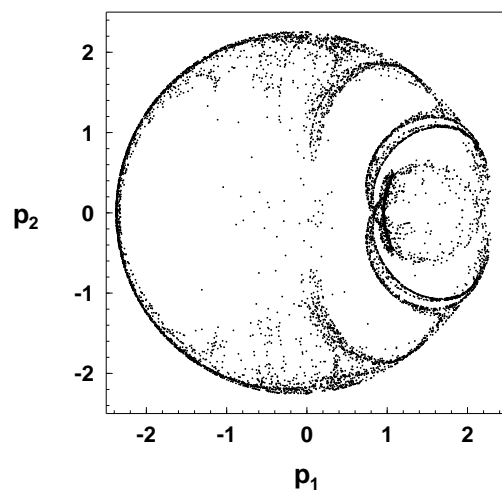
Рис. 6.18: Проекция фазового портрета (а–б) , сечение (в) и отображение (г) Пуанкаре хаотического аттрактора при  $\alpha = -0.31084$ .



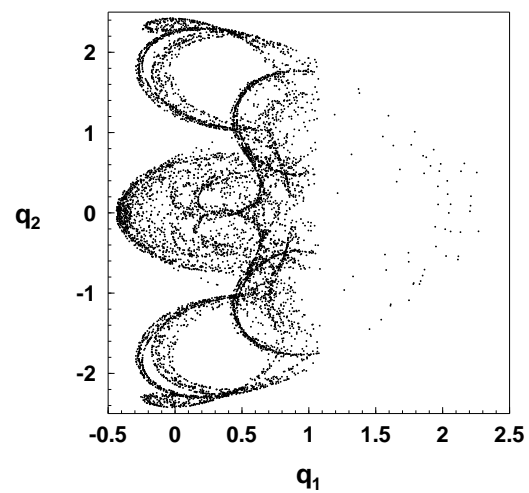
а



б



в



г

Рис. 6.19: Проекция фазового портрета (а–б) и проекции сечения Пуанкаре (в–г) хаотического аттрактора при  $\alpha = -0.15$ .

одной и той же секущей плоскостью  $\beta = -1.55$ , заметно отличаются друг от друга. Так, на рис. 6.20а–в приведены проекции сечения Пуанкаре, плоскостью  $\beta = -1.55$ , и отображение Пуанкаре, по переменной  $q_2$ , хаотического аттрактора при  $\alpha = -0.188$ . Соответственно на рис. 6.20г приведено отображение Пуанкаре, по этой же переменной, хаотического аттрактора при  $\alpha = -0.15$ . Сравнение соответствующих частей рисунков 6.19 и 6.20 показывает значительные отличия в структуре сечений и отображений Пуанкаре у двух рассматриваемых хаотических аттракторов. У обоих аттракторов сечения и отображения представляют собой развитые хаотические множества. Аппроксимация таких множеств одномерными кривыми невозможна.

Проведенные численные расчеты показали, что в пространстве параметров системы (6.23) может быть локализована трехмерная область изменения параметров  $N_1, N_3, \alpha$ , в которой хаотические аттракторы являются в большей степени типичными аттракторами исследуемой системы уравнений, чем регулярные аттракторы. Действительно, обозначим через  $Pr$  трехмерный параллелепипед в пространстве параметров системы (6.23), границы которого определяются условиями :

$$\begin{aligned} -0.32 < \alpha < 0; \quad -0.4 < N_1 < -0.1; \quad -1.6 < N_3 < -0.35; \\ A = 1.112; \quad B = -1.531; \quad \mu_1 = 0.5. \end{aligned} \quad (6.30)$$

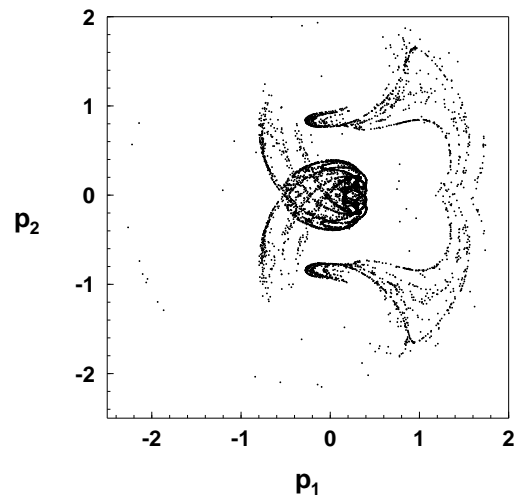
Практически для всех значений параметров системы (6.23), которые находятся внутри области  $Pr$ , единственным возможным аттрактором такой системы, в окрестности начала координат фазового пространства, является хаотический аттрактор.

Предположим, что область изменения начальных условий определяется соотношениями :

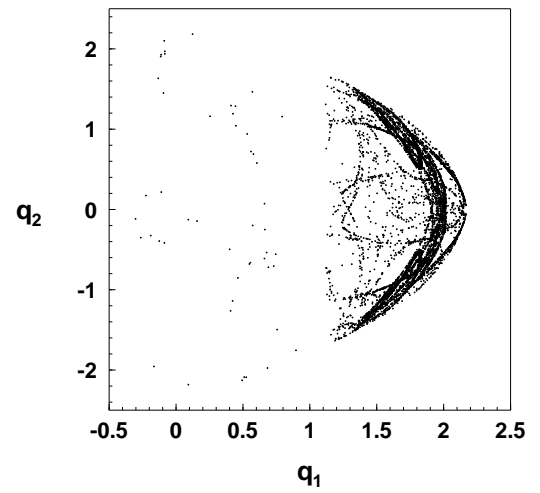
$$|p_i| \leq 2.5; \quad |q_i| \leq 2.5; \quad |\beta| \leq 2.5; i = 1, 2. \quad (6.31)$$

При удовлетворении в наших численных экспериментах условий (6.30) и (6.31) в пространстве параметров системы (6.23) удалось определить двух-

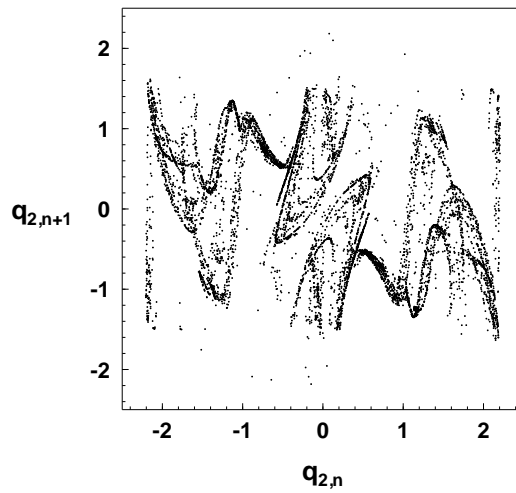




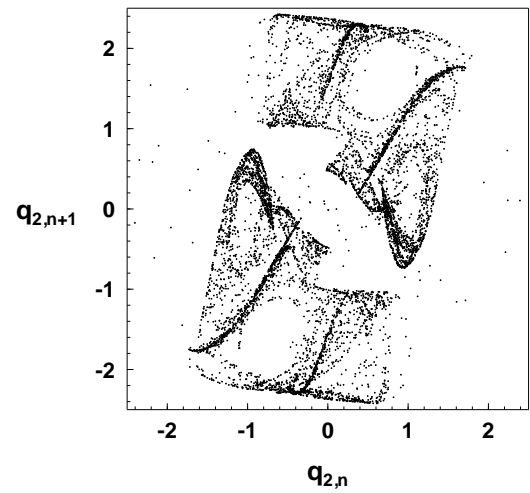
а



б



в



г

Рис. 6.20: Проекция сечения Пуанкаре (а–б) и отображение Пуанкаре (в) хаотического аттрактора при  $\alpha = -0.188$ ; отображение Пуанкаре (г) хаотического аттрактора при  $\alpha = -0.15$ .

параметрическую область  $Ca$ , границы которой приблизительно устанавливаются следующими соотношениями:

$$-1.5N_1 - 0.05 \leq N_3 \leq -0.475N_1 + 0.08; \quad 0 < N_1 \leq 10. \quad (6.32)$$

В пределах области  $Ca$  существуют небольшие "островки", общая площадь которых существенно меньше, чем площадь области  $Ca$ . В этих островках возможные аттракторы системы (6.23) будут регулярными. Для всех остальных значений  $N_1, N_3 \in Ca$  единственными существующими аттракторами системы уравнений (6.23) являются хаотические аттракторы одного из ранее рассмотренных типов. Причем, одномодовые аттракторы могут существовать только в очень узких полосах, расположенных вдоль границы  $Ca$ . Переход от регулярного к хаотическому движению происходит по ранее приведенным сценариям, в том числе и по "неклассическому" сценарию перемежаемости.

## 6.3 Хаос при параметрическом резонансе

### 6.3.1 Математическая модель для неидеального возбуждения

Теперь рассмотрим случай вертикального возбуждения электродвигателем ограниченной мощности платформы цилиндрического бака, частично заполненного жидкостью. Схематически такая механическая система представлена на рис 6.21. Вал электродвигателя через кривошипно-шатунный механизм соединен с платформой, на которой закреплен жесткий цилиндрический бак радиуса  $R$ , частично заполненный жидкостью. Когда кривошип  $a$  поворачивается на угол  $\Psi$ , платформа получает перемещение вида  $v(t) = a \cos \Psi(t)$ . Для описания колебаний свободной поверхности жидкости введем цилиндрическую систему координат  $Ox r \theta$  с началом на оси бака, на невозмущенной поверхности жидкости. Тогда уравнение рельефа свободной поверхности жидкости запишем в виде  $x = \eta(r, \theta, t)$ . Предположим, что жидкость невязкая и

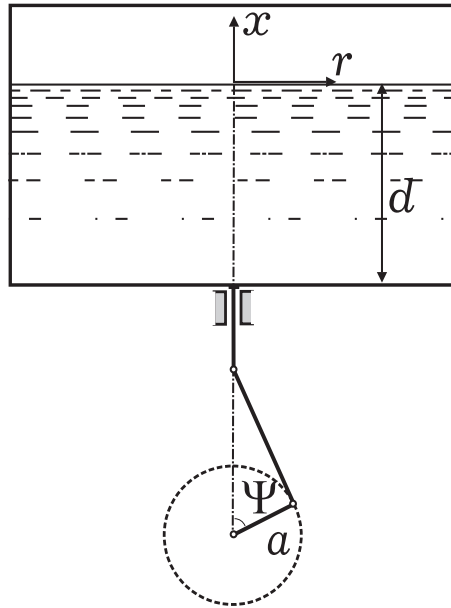


Рис. 6.21: Схема системы.

несжимаемая с плотностью  $\rho$  и заполняет цилиндрический бак сечения  $S$  до глубины  $x = -d$ .

Отыскивать функцию рельефа поверхности жидкости будем в виде разложения по собственным модам:

$$\eta(r, \theta, t) = \sum_{i,j} [q_{ij}^c(t) k_{ij}(r) \cos i\theta + q_{ij}^s(t) k_{ij}(r) \sin i\theta]. \quad (6.33)$$

Сохраняя все обозначения, принятые в [59], кинетическую энергию совокупной системы запишем в виде [56]:

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} m_0 \dot{v}^2 + \frac{1}{2} \rho S \sum_{i,j,m,n} a_{ijmn} \dot{q}_{ij}^{c,s} \dot{q}_{mn}^{c,s}. \quad (6.34)$$

Здесь  $I$  – момент инерции вала двигателя;  $m_0$  – масса бака с жидкостью;  $a_{ijmn}$  – нелинейные функции от  $q_{ij}^{c,s}(t)$ ,  $q_{mn}^{c,s}(t)$  [200, 204].

В свою очередь, потенциальная энергия перемещений свободной поверхности жидкости равна [56, 200]:

$$V = \rho \int \int_S dS \int_0^\eta (g + \ddot{v}) x dx = \frac{1}{2} \rho S (g + \ddot{v}) \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s}, \quad (6.35)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Поэтому лагранжиан системы получает вид :

$$L = \frac{1}{2}I\dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2}m_0a^2\dot{\Psi}^2\sin^2\Psi + \frac{1}{2}\rho S \sum_{i,j,m,n} a_{ijmn}\dot{q}_{ij}^{c,s}\dot{q}_{mn}^{c,s} + \frac{1}{2}\rho Sa(\dot{\Psi}^2\cos\Psi + \ddot{\Psi}\sin\Psi) \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s}q_{ij}^{c,s} - \frac{1}{2}\rho Sg \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s}q_{ij}^{c,s}. \quad (6.36)$$

В результате для  $\Psi(t)$  получаем следующее уравнение Лагранжа :

$$I\ddot{\Psi} = -2m_0a^2\dot{\Psi}^2\sin\Psi\cos\Psi - m_0a^2\ddot{\Psi}\sin^2\Psi + a\rho S(\dot{\Psi}^2\sin\Psi - \ddot{\Psi}\cos\Psi) \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s}q_{ij}^{c,s} - 2a\rho S\dot{\Psi}\cos\Psi \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s}\dot{q}_{ij}^{c,s} + \Phi(\Psi) - H(\Psi). \quad (6.37)$$

Последние два слагаемые в правой части уравнения (6.37) – движущий момент и момент внутренних сил сопротивления электродвигателя. Пусть скорость вращения вала  $\dot{\Psi}(t)$  в установившихся режимах двигателя близка к  $2\omega_1$ , где  $\omega_1$  – собственная частота основного тона колебаний свободной поверхности, которая соответствует модам  $q_{11}^c(t)k_{11}(r)\cos\theta$  и  $q_{11}^s(t)k_{11}(r)\sin\theta$ .

Введем в рассмотрение малый положительный параметр

$$\varepsilon = \omega_1\sqrt{\frac{a}{g}}. \quad (6.38)$$

Также предположим, что

$$\dot{\Psi} - 2\omega_1 = \varepsilon^2\omega_1\beta. \quad (6.39)$$

Колебания свободной поверхности жидкости аппроксимируем колебаниями по основным и вторичным модам, амплитуды которых определяем в виде [56, 204]:

$$\begin{aligned} q_{11}^c(t) &= \varepsilon v \left[ p_1(\tau) \cos \frac{\Psi}{2} + q_1(\tau) \sin \frac{\Psi}{2} \right]; \\ q_{11}^s(t) &= \varepsilon v \left[ p_2(\tau) \cos \frac{\Psi}{2} + q_2(\tau) \sin \frac{\Psi}{2} \right]; \\ q_{01}(t) &= \varepsilon^2 v \left[ A_{01}(\tau) \cos \Psi + B_{01}(\tau) \sin \Psi + C_{01}(\tau) \right]; \\ q_{21}^{c,s}(t) &= \varepsilon^2 v \left[ A_{21}^{c,s}(\tau) \cos \Psi + B_{21}^{c,s}(\tau) \sin \Psi + C_{21}^{c,s}(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Здесь  $\tau$  – медленное время,  $\tau = \frac{1}{4}\varepsilon^2\Psi$ ,  $v = \frac{R}{1.8412}\operatorname{th}(\frac{1.8412}{R}d)$ . Определив безразмерные амплитуды  $A_{ij}^{c,s}(\tau)$ ,  $B_{ij}^{c,s}(\tau)$ ,  $C_{ij}^{c,s}(\tau)$  вторичных мод по методу Майлса [51, 53, 182, 204, 203, 206] через амплитуды  $p_1(\tau)$ ,  $q_1(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$  и применив процедуру усреднения лагранжиана по, явно входящему быстрому времени  $\Psi(t)$ , для амплитуд доминантных мод получим следующую систему уравнений [56, 182, 183]:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - \left[ \beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_2 + 2q_1; \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + \left[ \beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_2 + 2p_1; \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 + N_1 \beta - \mu_1 q_1; \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - \left[ \beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_1 + 2q_2; \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + \left[ \beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_1 + 2p_2.\end{aligned}\tag{6.41}$$

Третье уравнение системы (6.41), как и ранее, получено из уравнения для скорости вращения вала  $\dot{\Psi}$  (6.37) после применения процедуры усреднения и использования соотношений (6.39) – (6.40). Кроме того, в системе уравнений (6.41) приняты следующие обозначения:  $\alpha = -\frac{\delta}{\omega_1}$  – коэффициент дополнительных сил демпфирования  $\varepsilon^2 \delta \dot{q}_{ij}^{c,s}$  колебаний жидкости [51, 203, 204, 206];  $N_0, N_1$  – постоянные линейной статической характеристики электродвигателя;  $N_3 = \frac{1}{\omega_1} \left( N_0 + 2N_1 \omega_1 \right)$ ;  $\mu_1 = \frac{\rho S v R^2}{(1.8412)^2 (2I + m_0 a^2) \omega_1^2}$ ;  $A$  и  $B$  – константы, величины которых зависят от диаметра бака и глубины заполнения его жидкостью [51, 203].

Система уравнений (6.41) использовалась в качестве основной математической модели при исследовании динамики колебаний бака с жидкостью, возбуждаемого электродвигателем ограниченной мощности. Естественно, что математическая модель для частного случая идеального возбуждения легко может быть получена из системы (6.41). В случае идеального возбуждения третье уравнение системы (6.41) следует отбросить, а в оставшихся положить

$\beta = const$ . Как установлено Майлсом [200], система с идеальным возбуждением не имеет хаотических режимов установившихся колебаний при параметрическом резонансе. Покажем, что учет неидеальности возбуждения позволяет обнаружить хаос в этой детерминированной динамической системе.

### 6.3.2 Возникновение, развитие и исчезновение динамического хаоса

Целью дальнейшего исследования является поиск хаотических движений системы (6.41) и изучение сценариев перехода от регулярных движений к хаотическим. Для достижения этой цели в пространстве параметров системы (6.41) был проведен большой комплекс численных расчетов [56, 182, 183]. Методика проведения таких расчетов детально описана в главах 2–3.

При проведении численных расчетов предполагалось, что

$$\alpha = -0.8; \quad A = 1.12; \quad B = -1.531; \quad N_3 = -0.25; \quad \mu_1 = 4.5. \quad (6.42)$$

Начальные условия варьировались в окрестности начала координат фазового пространства системы уравнений (6.41).

В качестве бифуркационного параметра рассматривался параметр  $N_1$ , определяющий угол наклона статической характеристики электродвигателя. Напомним, что этот параметр зависит от типа электродвигателя, применяемого для возбуждения колебаний. Начальные условия при проведении численных расчетов варьировались в окрестности начала координат фазового пространства системы (6.41).

На рис.6.22 приведена зависимость максимального ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1$  от значений параметра  $N_1$ . Как видно из этого рисунка, интервал  $N_1 \in (-2.1, -0.3)$  практически полностью покрывается подинтервалами, в которых максимальный ляпуновский показатель имеет положительное значение. Следовательно, в этих подинтервалах положительности максимального ляпуновского показателя, в системе (6.41) существуют хаотические аттракторы.

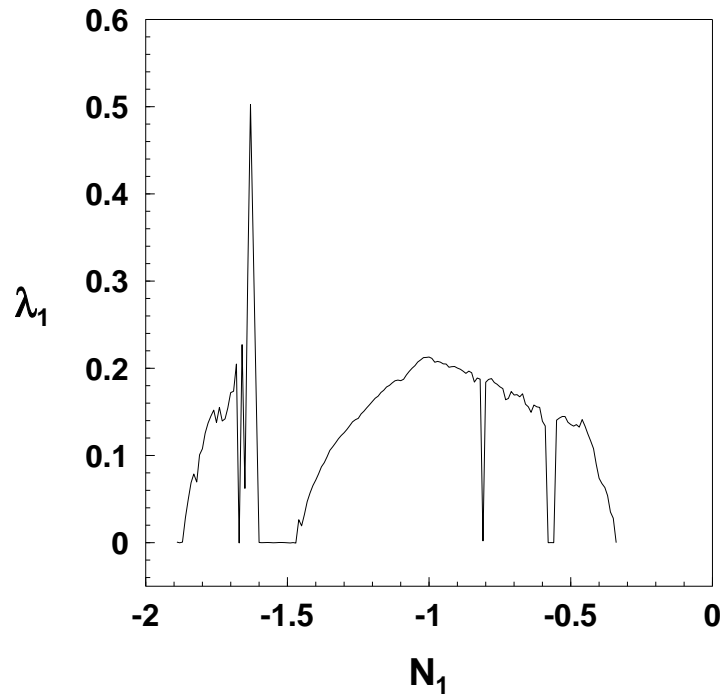


Рис. 6.22: Зависимость максимального ляпуновского показателя  $\lambda_1$  от параметра  $N_1$ .

Исследуем типы хаотических аттракторов системы (6.41) и изучим сценарии перехода от регулярных аттракторов к хаотическим. Размерность фазового пространства системы (6.41) равна пяти. Поэтому наглядное геометрическое изучение пятимерных фазовых портретов и четырехмерных сечений Пуанкаре аттракторов системы возможно только в каких-либо проекциях. Заметим, что в силу симметрии системы по переменным  $p_1, q_1$  и  $p_2, q_2$ , проекции ее фазовых портретов в установившихся режимах как регулярных, так и хаотических, обладают одной интересной особенностью. Проекция фазового портрета на плоскость  $p_1, q_1$  совпадает с проекцией на плоскость  $p_2, q_2$  с точностью до постоянного множителя. Как правило, мы будем использовать двумерную проекцию на плоскость  $p_1, q_1$ . Напомним, что эти фазовые координаты отвечают колебаниям по первой основной моде.

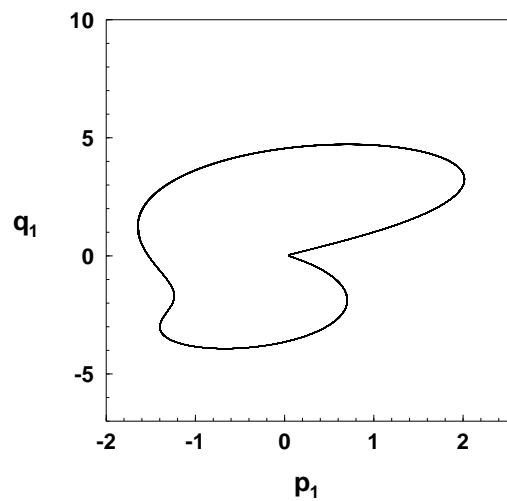
В окрестности точки  $N_1 = -2.1$  в системе существует устойчивый пре-

дельный цикл простой однотоктной структуры. Проекция фазового портрета такого цикла приведена на рис. 6.23а. Начиная со значения  $N_1 \approx -2.03$ , начинается бесконечный каскад бифуркаций удвоения исходного цикла. На рис. 6.23б–г приведены первые три бифуркации этого каскада. Последовательно наблюдается возникновение двух-, четырех- и восьмитактных предельных циклов. Данный каскад бифуркаций удвоения завершается в критической точке  $N_1 \approx -1.86$  возникновением хаотического аттрактора. На рис. 6.24 приведены построенные при  $N_1 = -1.85$  различные проекции фазового портрета возникшего хаотического аттрактора, его сечение Пуанкаре плоскостью  $\beta = -1.7$  и отображение Пуанкаре по переменной  $q_1$ . Возникший в системе, по сценарию Фейгенбаума, хаотический аттрактор имеет спиральную структуру. В проекции  $p_1, q_1$  этот аттрактор обладает двухтактной структурой состоящей из двух "лент" с двумя внутренними "дырами". Сечение Пуанкаре является квазиленточным. Точки хаотического множества этого сечения группируются вдоль некоторых одномерных кривых. Отображение Пуанкаре также может быть достаточно точно аппроксимировано одномерными кривыми. В дальнейшем при построении сечений Пуанкаре мы всегда будем использовать, в качестве секущей, плоскость  $\beta = -1.7$ .

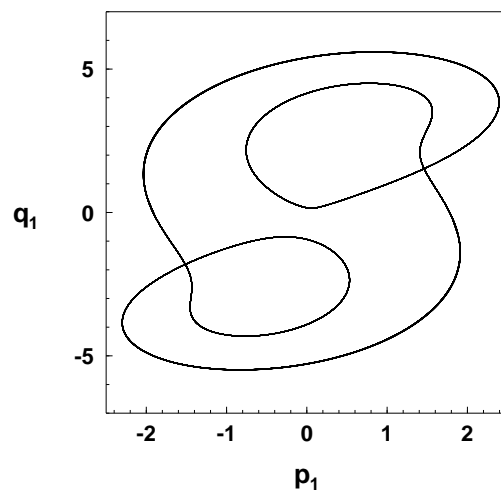
На рис. 6.25 приведены Фурье-спектры: однотоктного предельного цикла, первых двух бифуркаций удвоения периода и возникшего по сценарию Фейгенбаума хаотического аттрактора. Как хорошо видно из этого рисунка, Фурье-спектры предельных циклов являются дискретными. Легко заметить последовательное увеличение числа пиков этих спектров на приведенных рисунках. Приведенный на рис. 6.25г спектр хаотического аттрактора является непрерывным. Однако его структура со сглаженными пиками и завалами вдоль частотной оси отдаленно напоминает спектры исчезнувших предельных циклов.

Хаотические аттракторы, подобные приведенному на рис. 6.24, существуют при изменении  $N_1$  на интервале  $-1.86 < N_1 \leq -1.8$ . Затем в результате внутренних бифуркаций хаотических аттракторов происходит сли-

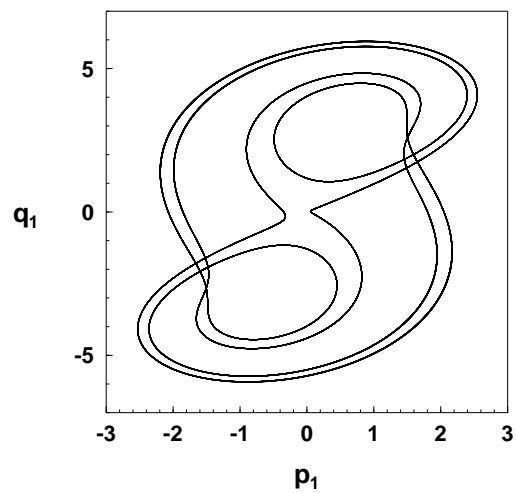




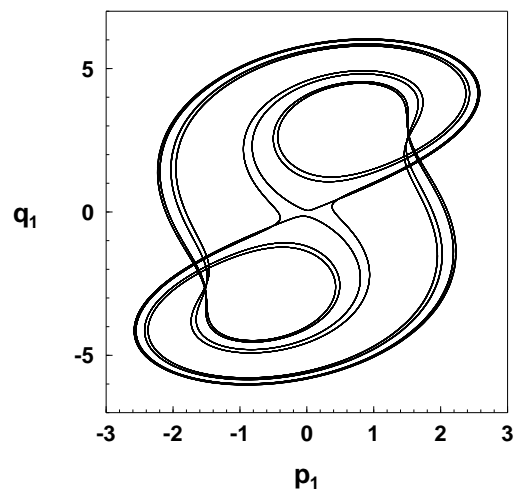
а



б

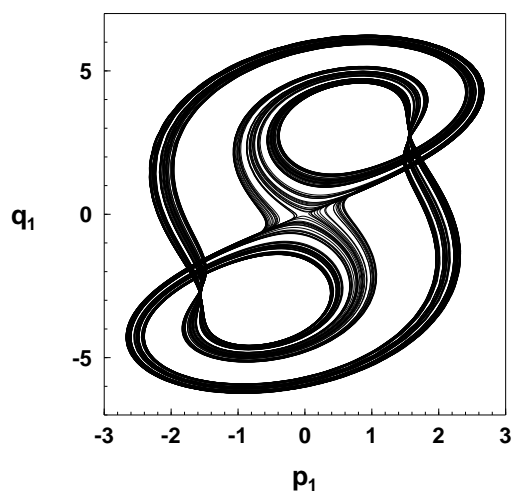


в

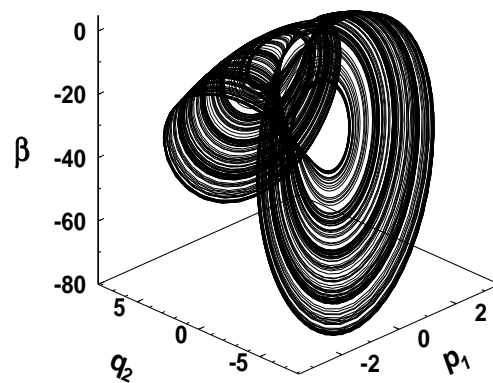


г

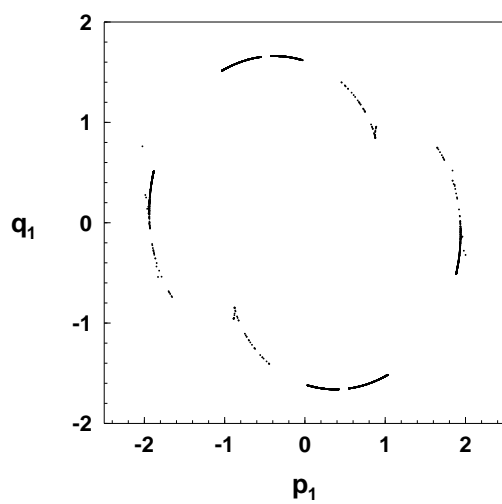
Рис. 6.23: Проекция фазовых портретов предельного цикла при  $N_1 = -2.1$  (а) и первых трех его бифуркаций удвоения периода (б–г).



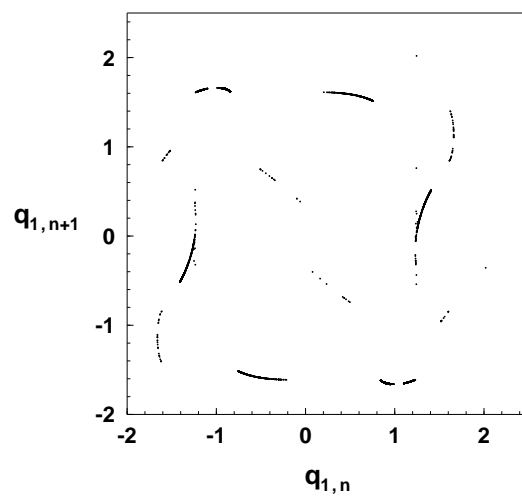
а



б



в



г

Рис. 6.24: Проекция фазового портрета хаотического аттрактора при  $N_1 = -1.85$  (а–б), его сечение (в) и отображение Пуанкаре (г) .

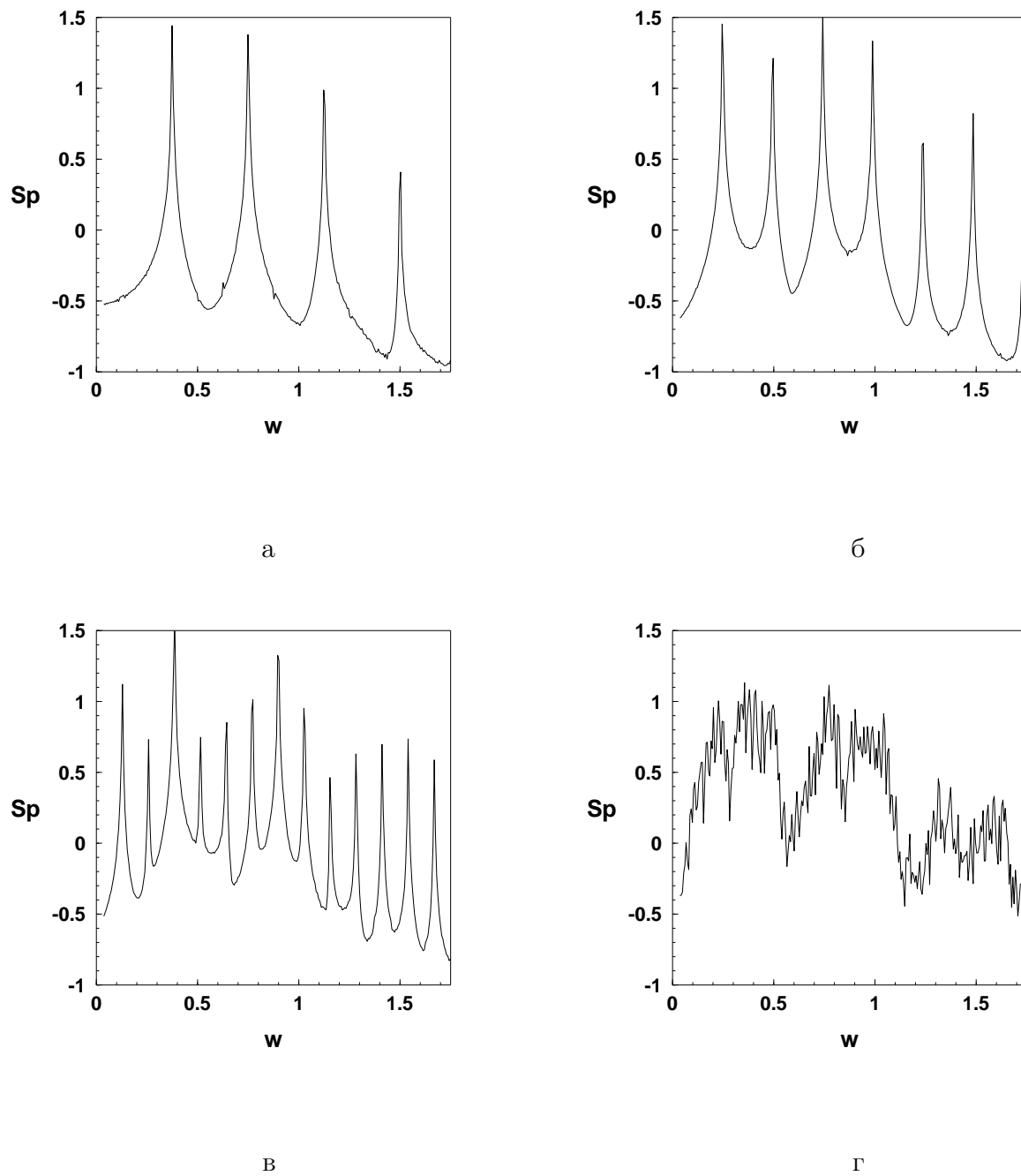


Рис. 6.25: Фурье-спектры предельного цикла при  $N_1 = -2.04$  (а), первых двух его бифуркаций удвоения периода (б–в) и хаотического аттрактора при  $N_1 = -1.85$  (г).

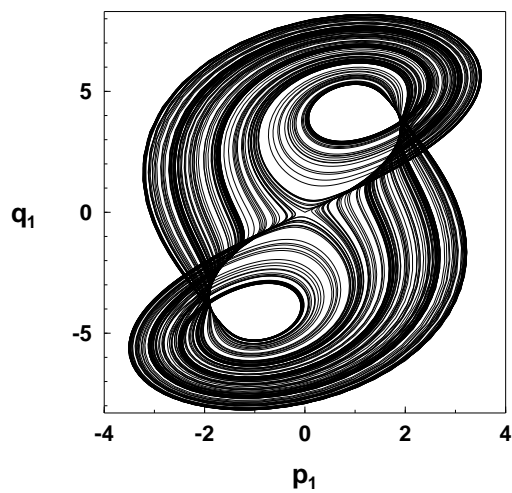
яние двухтактных лент аттрактора в однотоктную ленту. Данное слияние происходит при значении  $N_1 \approx -1.798$ . В системе возникают хаотические аттракторы, подобные приведенному на рис. 6.26. Как видно из рис. 6.26а, однотоктная лента хаоса по-прежнему имеет две внутренние "дыры". Также в этом случае возрастают амплитуды колебаний по фазовым переменным. Несколько усложняется, по сравнению с однотоктным хаосом, структура сечения и, особенно, отображения Пуанкаре. Хотя и для двухтактного хаоса сечение и отображение Пуанкаре хорошо аппроксимируются одномерными кривыми. Фурье-спектр для хаотического аттрактора при  $N_1 = -1.75$  приведен на рис. 6.27а. По сравнению со случаем двухтактного хаоса в приведенном спектре отсутствуют завалы в области средних частот.

Хаотический аттрактор сохраняет структуру, подобную приведенной на рис. 6.26, при изменении параметра  $N_1$  в пределах  $-1.798 < N_1 < -1.67$ . Однако при изменении  $N_1$  в вышеуказанных пределах, при неизменности структуры проекций фазовых портретов по основным модам колебаний (однотоктные с двумя окнами), происходят их некоторые эволюции в результате внутренних бифуркационных явлений. При увеличении значений  $N_1$  наблюдается развитие стохастичности аттракторов в том смысле, что траектории начинают все плотнее заполнять занимаемые аттракторами фазовые объемы, уменьшая площадь окон в проекциях  $p_1, q_1$  и  $p_2, q_2$ . При этом также наблюдается возрастание амплитуд колебаний по всем фазовым переменным и увеличение значений максимальных ляпуновских показателей. Далее, в довольно узком окне периодичности,  $-1.67 < N_1 \leq -1.65$  в системе наблюдаются бифуркации возникновения и гибели целого ряда предельных циклов. Затем при  $N_1 \approx -1.64$  в системе вновь возникает хаотический аттрактор, проекции которого имеют однотоктную структуру с двумя внутренними "дырами". Но заметно возрастает (см. рис. 6.22) величина максимального ляпуновского характеристического показателя, которая на интервале  $N_1 \in (-1.64, -1.62)$  достигает своих наибольших значений. Следовательно, на этом интервале наблюдается наибольшая скорость разбегания близких фазовых траекторий. В

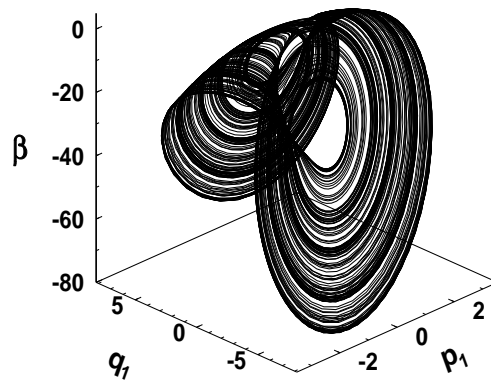
окрестности точки  $N_1 \approx -1.61$  хаотический аттрактор исчезает и в системе возникает устойчивый предельный цикл.

При дальнейшем увеличении значения  $N_1$  в системе (6.41) существует достаточно "широкое" окно периодичности в хаосе (см. рис. 6.22). При приближении значения  $N_1$  к правой границе этого окна, со значения  $N_1 = -1.5$ , начинается каскад бифуркаций удвоения периода предельных циклов. Данный бесконечный каскад заканчивается возникновением хаотического аттрактора при  $N_1 \approx -1.43$ . Вновь наблюдается переход от регулярного режима к хаотическому по сценарию Фейгенбаума. Проекция фазового портрета, возникшего хаотического аттрактора, его отображение Пуанкаре и Фурье–спектр, построенные при  $N_1 = -1.4$ , приведены, соответственно, на рис. 6.27б–г. Как видно из этого рисунка, проекция фазового портрета имеет структуру двухтактной ленты с двумя внутренними "дырами" и очень напоминает проекцию фазового портрета изображенную на рис. 6.24а. Практически рассматриваемые геометрические структуры могут быть получены одна из другой при помощи преобразования поворота. Отображение Пуанкаре (рис. 6.27в) имеет ленточную структуру и допускает одномерную дискретную аппроксимацию. Фурье–спектр (рис. 6.27г) является непрерывным с завалами в среднечастотном диапазоне, аналогично спектру хаотического аттрактора при  $N_1 = -1.85$ . Таким образом, налицо заметная схожесть различных характеристик хаотических аттракторов при  $N_1 = -1.85$  и  $N_1 = -1.4$

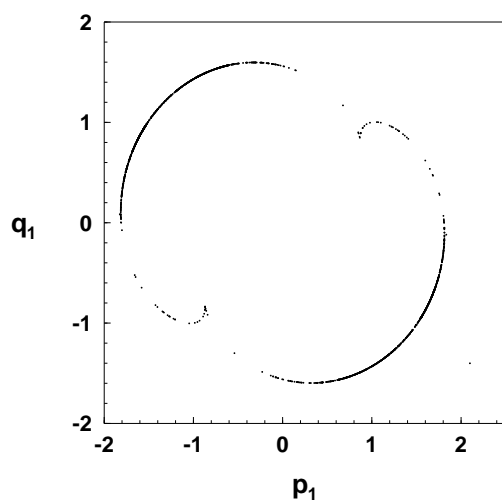
Двухтактные, в проекциях на координатные плоскости по амплитудам основных мод колебаний, хаотические аттракторы существуют в системе (6.41) при  $-1.43 < N_1 < -1.36$ . При дальнейшем увеличении  $N_1$ , в точке  $N_1 \approx -1.36$  происходит слияние двухтактной ленты хаотического аттрактора в однотоктную. На рис. 6.28а–г приведены проекция фазового портрета, сечение и отображение Пуанкаре и Фурье–спектр хаотического аттрактора такого типа, построенные при  $N_1 = -1.25$ . Здесь наблюдаются некоторые очевидные аналогии с хаотическим аттрактором, приведенным на рис. 6.26. Отличным от предыдущего здесь является то, что по мере развития сто-



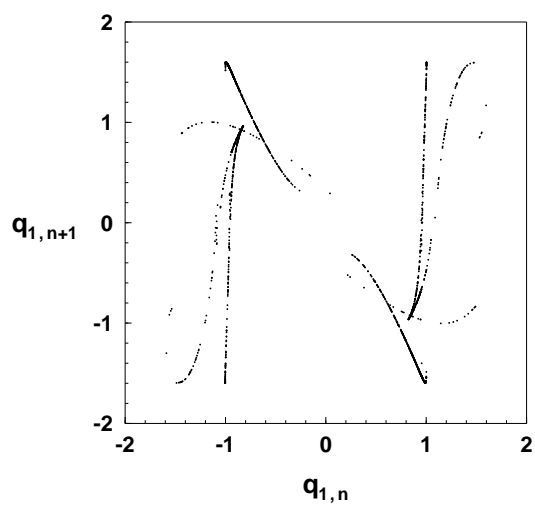
а



б

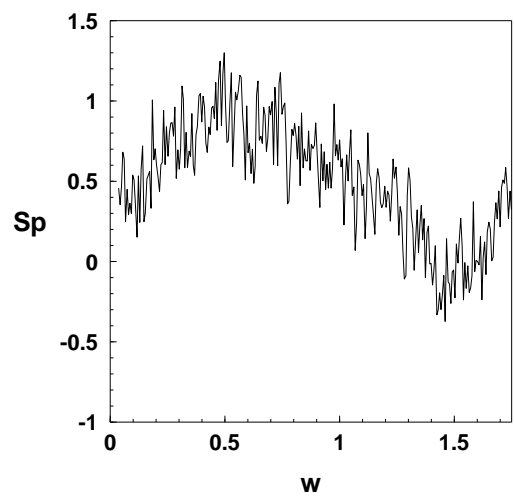


в

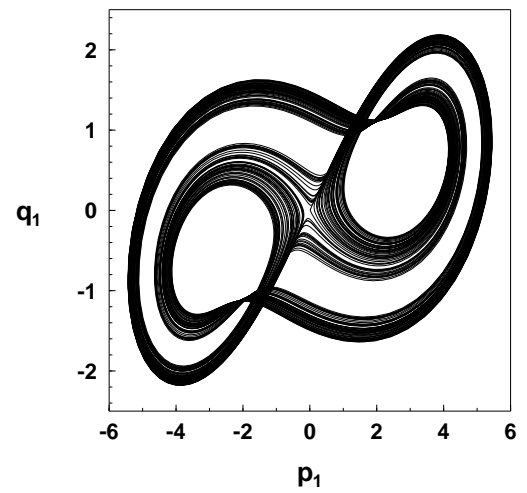


г

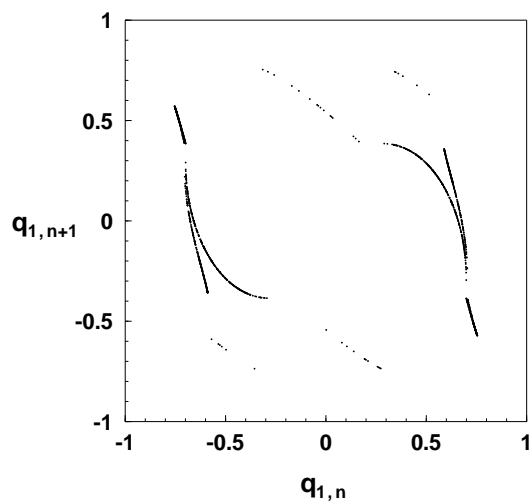
Рис. 6.26: Проекция фазового портрета хаотического аттрактора при  $N_1 = -1.75$  (а–б), его сечение (в) и отображение Пуанкаре (г) .



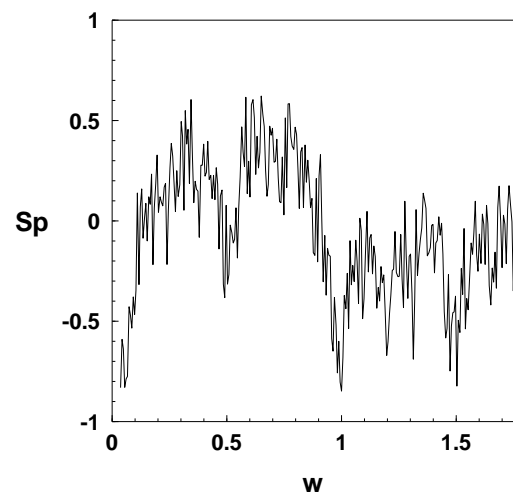
а



б



в



г

Рис. 6.27: Фурье-спектр хаотического аттрактора при  $N_1 = -1.75$  (а); проекция фазового портрета (б), отображение Пуанкаре (в) и Фурье-спектр (г) хаотического аттрактора при  $N_1 = -1.4$ .

хастичности аттрактора наблюдается уменьшение фазового объема области, занимаемой траекториями аттрактора.

Дальнейшие внутренние гомоклинические бифуркации, происходящие при продолжении увеличения значения  $N_1$  приводят к возникновению хаотического аттрактора имеющего сплошную структуру в проекции  $p_1, q_1$ , то есть хаоса с наиболее развитой стохастичностью. На рис. 6.29 приведен аттрактор такого типа, построенный при  $N_1 = -1.05$ . Продолжает наблюдаться уменьшение амплитуд колебаний по основным модам траекторий аттрактора. Сечение Пуанкаре имеет ленточную структуру и, качественно очень похоже на сечение в предыдущем случае. Напротив отображение Пуанкаре усложняется и начинает утрачивать ленточность своей структуры. Из Фурье-спектра аттрактора практически исчезают частотные завалы и он, оставаясь непрерывным, приобретает структуру, близкую к сплошному шумовому пьедесталу. Хаотические аттракторы, подобные приведенному на рис. 6.29, существуют при  $-1.11 \leq N_1 \leq 0.9$ . При  $N_1 \approx -0.89$  в системе вновь происходит возникновение хаотического аттрактора имеющего (в проекциях  $p_1, q_1$  и  $p_2, q_2$ ) однотактную структуру с двумя "дырами". Такая структура фазового портрета хаотического аттрактора сохраняется при  $N_1 \in (-0.89, -0.35)$ . Хотя следует отметить, что в интервале хаоса  $N_1 \in (-0.89, -0.35)$  имеются узкие окна периодичности. При  $N_1 = -0.34$  хаотический аттрактор сменяется регулярным – четырехтактным предельным циклом.

Как вытекает из проведенных исследований, хаотические аттракторы различных типов, существующие в системе уравнений (6.41) при  $N_1 < -1.62$ , во многом подобны соответствующим типам хаотических аттракторов, существующих при  $N_1 > -1.43$ . Однако имеется еще одно, не очевидное, свойство их подобия, которое мы проиллюстрируем на примере однотактного хаотического аттрактора. На рис. 6.30 приведены трехмерные проекции хаотических аттракторов, построенных при  $N_1 = -1.75$  и  $N_1 = -1.21$ . В этих трехмерных проекциях учитывается и координата  $\beta$ , описывающая вращение вала электродвигателя. Как видно из рисунка, фазовые портреты этих аттрак-



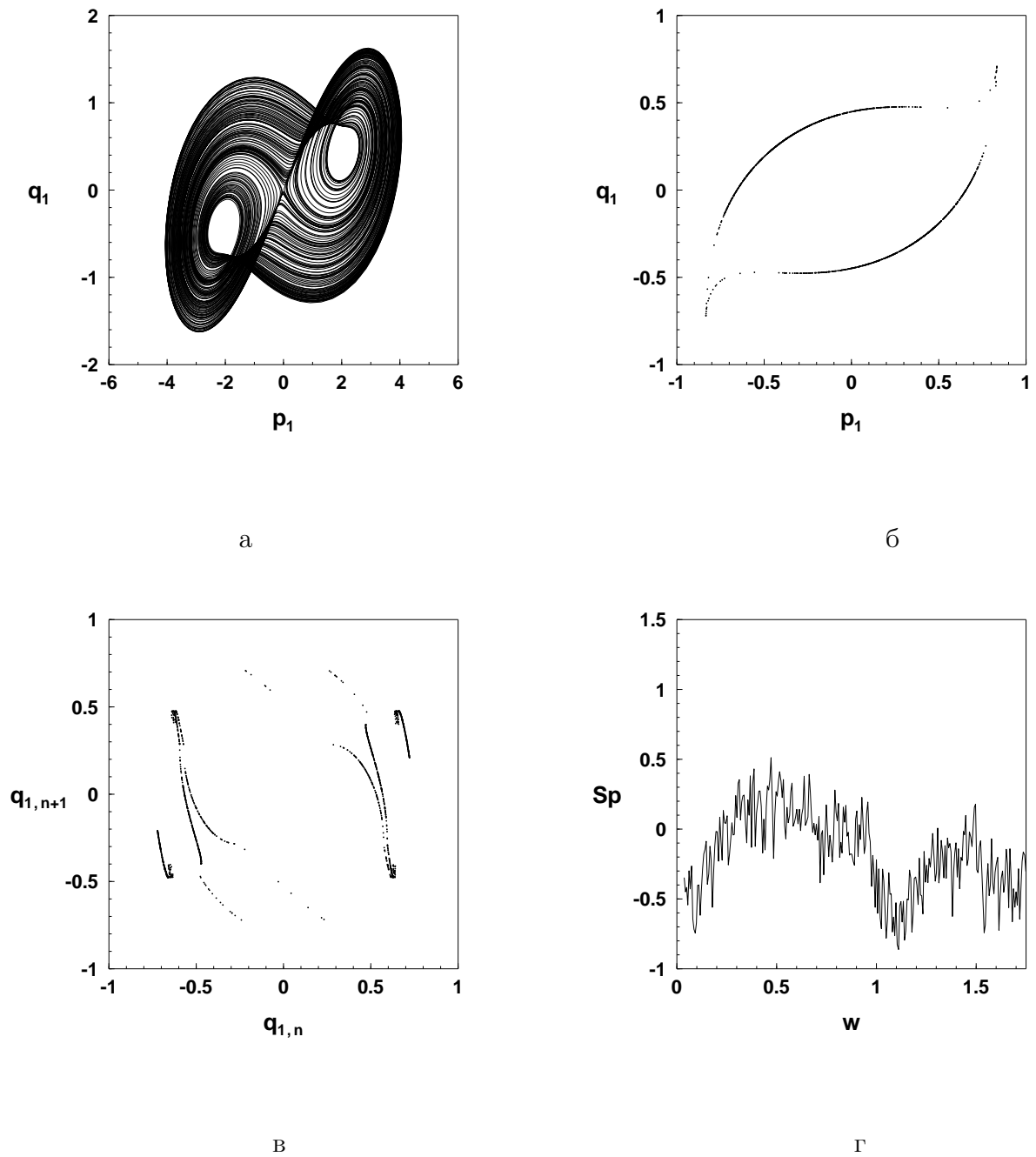


Рис. 6.28: Проекция фазового портрета (а), сечение (б) и отображение Пуанкаре (в) и Фурье-спектр (г) хаотического аттрактора при  $N_1 = -1.25$ .

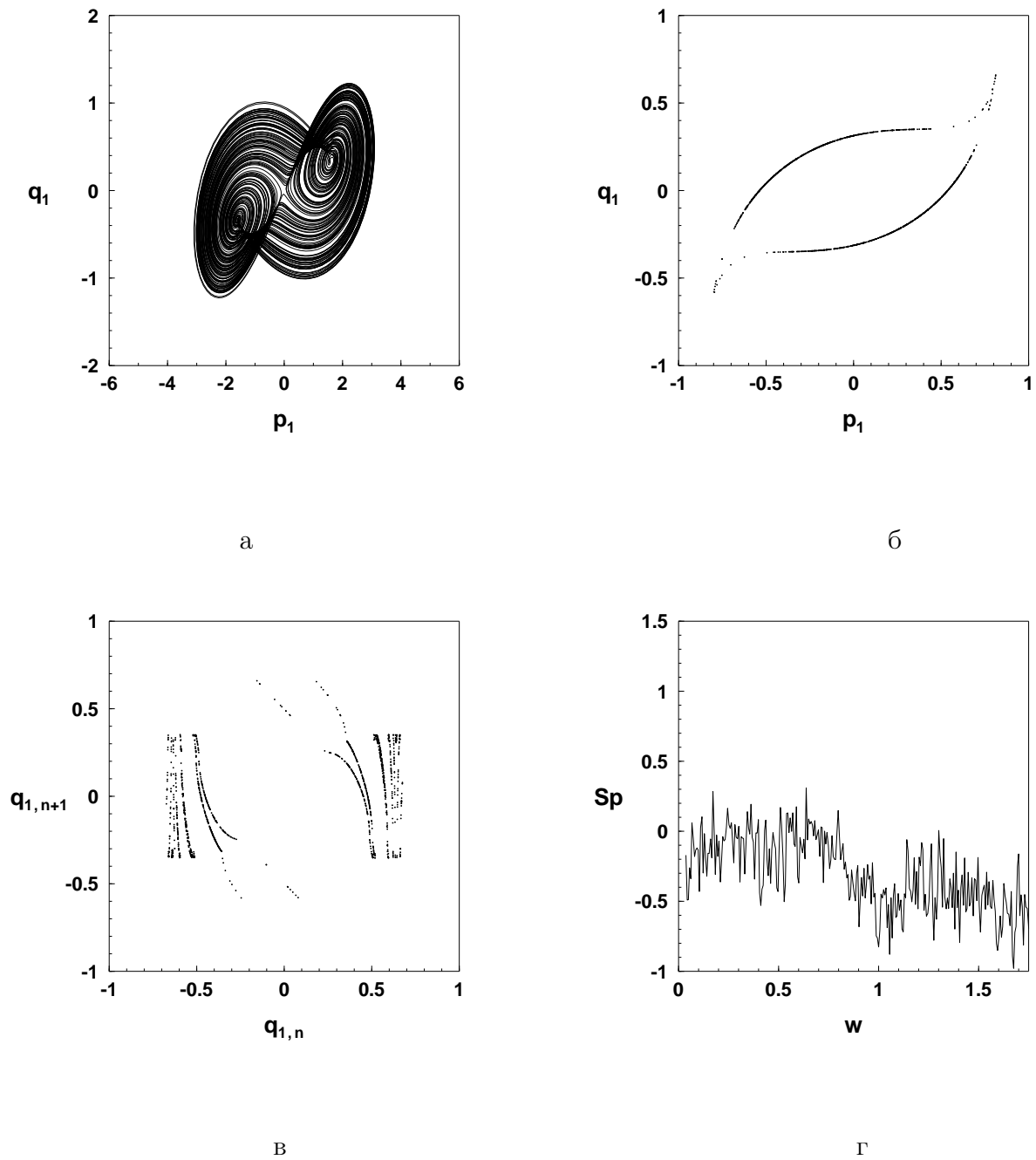


Рис. 6.29: Проекция фазового портрета (а), сечение (б) и отображение Пуанкаре (в) и Фурье-спектр (г) хаотического аттрактора при  $N_1 = -1.05$ .

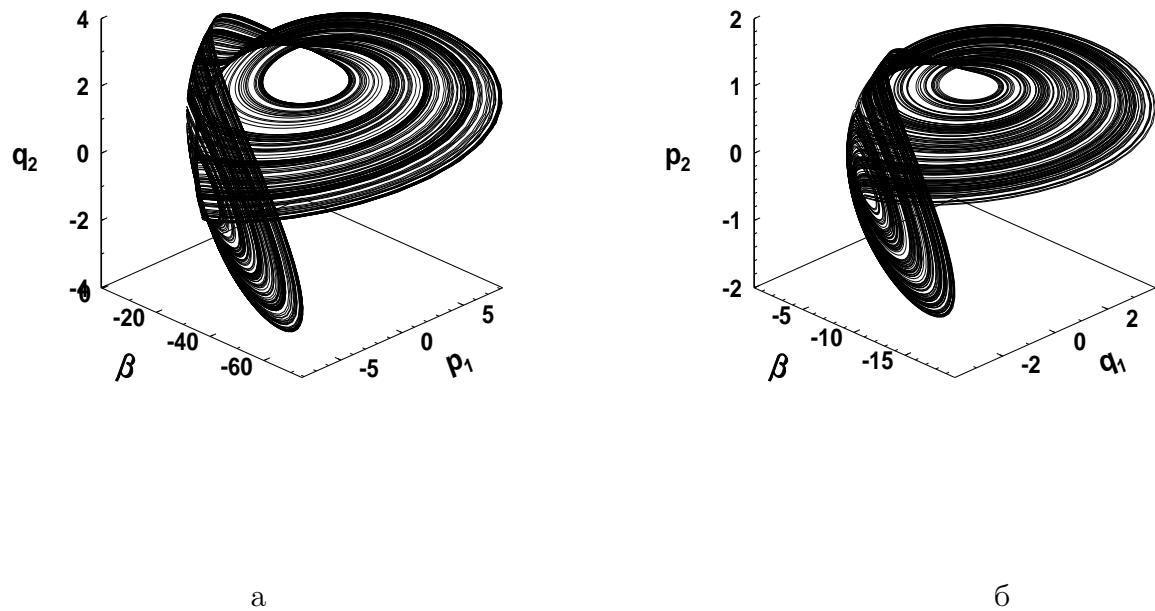


Рис. 6.30: Проекция фазовых портретов хаотических аттракторов при  $N_1 = -1.75$ (а) и при  $N_1 = -1.21$  (б).

торов практически идентичны. Однако они различны, поскольку на рисунке представлены проекции фазовых портретов на разные подпространства фазового пространства. Таким образом, наблюдается структурное подобие проекций фазовых портретов однотоковых хаотических аттракторов в совершенно разных фазовых подпространствах, что, очевидно, связано с симметричностью рассматриваемой задачи. Заметим, что таким подобием различных проекций фазовых портретов обладают и двухтактные хаотические аттракторы.

Следует особо подчеркнуть, что хаотические аттракторы являются типичными установившимися режимами рассматриваемой детерминированной динамической системы. Нами были найдены значительные интервалы изменения параметра  $N_1$ , в которых существуют хаотические аттракторы. Вкратце упомянем, что также были исследованы бифуркации системы (6.41) при изменении параметров  $\alpha$  и  $N_3$ . Эти исследования позволили обнаружить об-

ширные области в пространстве параметров системы (6.41), в которых существуют хаотические аттракторы различных типов.

В заключение отметим, что было проведено сравнение результатов для случаев идеального и неидеального возбуждения колебаний жидкости. Как мы уже отмечали, система уравнений для случая идеального возбуждения может быть легко получена из системы (6.41). Для случая идеального возбуждения третье уравнение в системе (6.41) следует отбросить, а в оставшихся четырех уравнениях считать  $\beta$  не неизвестной функцией, а заданной постоянной величиной. Так, преобразованная система была численно проинтегрирована при выполнении условий (6.42) и  $N_1 \in (-2.1, -0.3)$ . Значение  $\beta$  изменялось в интервале  $\beta \in (2\beta_1, 2\beta_2)$ , где  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , соответственно, минимальное и максимальное значение амплитуд колебаний  $\beta$  в установившихся режимах случая неидеального возбуждения. Проведенное численное интегрирование позволило установить, что в случае идеального возбуждения единственными аттракторами данной системы уравнений, при так выбранных значениях параметров, являются только устойчивые положения равновесия. Этот результат подтверждает результаты работ [43, 202] об отсутствии хаотических аттракторов при идеальном возбуждении параметрических колебаний. На практике, все источники возбуждения являются неидеальными. Поэтому применение "идеальных" расчетных моделей приводит к получению неверных результатов, так как исключается возможность обнаружения целых классов установившихся колебательных режимов, в том числе и хаотических.

## 6.4 Выводы по главе

Таким образом, применение более корректных, чем применявшиеся ранее, принципов математического моделирования нелинейных процессов взаимодействия между баком, заполненным жидкостью, и электродвигателем ограниченной мощности позволило получить следующие результаты:

1. Исследовать влияние параметров бака, жидкости и источника возбуждения колебаний (электродвигателя) на возникновение, развитие и исчезновение детерминированного хаоса.

2. Установить существование нескольких типов хаотических аттракторов исследуемых детерминированных динамических систем типа "бак с жидкостью–электродвигатель", в том числе так называемых одномодовых и двумодовых аттракторов.

3. Обнаружить и описать новый сценарий перехода к хаосу, который обобщает классический сценарий Помо–Манневилля.

4. Построить и тщательно проанализировать основные характеристики хаотических аттракторов системы, а именно ляпуновские характеристические показатели, фазовые портреты, сечения и отображения Пуанкаре, распределения естественной инвариантной меры, распределения спектральной плотности.

5. Выявить существование хаотических аттракторов в случае параметрического резонанса в системе, что ранее считалось невозможным.

6. Показать, что переход к хаосу может происходить по различным сценариям, таким как: каскад бифуркаций удвоения периода (сценарий Фейгенбаума), перемежаемость (классическая и обобщенная), жесткий переход.

7. Выделить случаи, в которых хаотическая динамика полученной системы дифференциальных уравнений пятого порядка может быть аппроксимирована при помощи одномерного дискретного отображения.

8. Показать, что хаотические аттракторы являются типичными аттракторами для систем "бак с жидкостью–электродвигатель". В пространстве параметров этих систем найдены обширные области, в которых существуют хаотические движения.

9. Локализовать области в фазовом пространстве, в которых хаотический аттрактор является единственным аттрактором соответствующей системы дифференциальных уравнений.

# Выводы

Таким образом, в диссертации получены следующие новые научные результаты.

Для маятниковых систем:

1. Применен новый подход, благодаря которому построены энергетически корректные математические модели некоторых маятниковых систем как в виде систем дифференциальных уравнений без отклонения аргумента, так и в виде систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, а также в виде систем дифференциальных уравнений нейтрального типа.

2. Впервые показано существование хаотических аттракторов у рассмотренных маятниковых систем, несмотря на то, что их существование в некоторых случаях ранее считалось невозможным.

3. Подробно проанализировано влияние параметров маятника и источника возбуждения его колебаний (электродвигателя) на возникновение, развитие и исчезновение детерминированного хаоса. Описаны сценарии перехода от регулярных колебаний к хаотическим и наоборот.

4. Получены фазопараметрические характеристики и спектры ляпуновских характеристических показателей систем. Построены и детально проанализированы фазовые портреты, сечения и отображения Пуанкаре, распределения естественной инвариантной меры и распределения спектральной плотности хаотических аттракторов.

5. Показано, что наличие запаздывания в системах "маятник–электродвигатель" приводит к существенному увеличению количества установившихся режимов взаимодействия.

6. Установлено, что запаздывание может играть роль своеобразного энергетического регулятора, приводящего к появлению необычных установившихся режимов взаимодействия, при которых скорость вращения вала двигателя достигает значений, превышающих скорость вращения вала без колебательной нагрузки.

7. Доказано, что в некоторых областях в пространстве параметров рассмотренных систем запаздывание, фактически, играет роль управляющего воздействия при стабилизации (дестабилизации) колебаний маятника.

Для систем "генератор–пьезокерамический излучатель" :

1. Исследована новая математическая модель, описывающая процесс взаимодействия колебательных режимов пьезокерамического излучателя и задающего электрогенератора.

2. В данной детерминированной системе было обнаружено несколько типов хаотических аттракторов, в том числе и два типа гиперхаотических.

3. Установлены и объяснены заметные отличия в фазовых портретах, сечениях и отображениях Пуанкаре, распределениях инвариантной меры и спектральной плотности у существующих в системе хаотических аттракторов.

4. Показано, что системе присущи многие из, встречающихся в нелинейной динамике, сценариев перехода от регулярных движений к хаотическим. Обнаружены переходы "порядок–хаос" по сценарию Фейгенбаума, через перемежаемость первого типа по Помо–Манневиллю, жесткие переходы к хаосу.

5. Для изучения влияния различных факторов запаздывания построена математическая модель системы в виде системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

6. Показано, что факторы запаздывания существенно влияют на динамику системы. При изменениях значений запаздывания в системе наблюдается большое разнообразие изменений типа установившихся режимов вида "хаос–порядок" или "порядок–хаос–порядок–хаос".

7. Установлено, что существование детерминированного хаоса в системе

объясняется, главным образом, взаимодействием между подсистемами (генератором и излучателем), а не автономными свойствами каждой из подсистем в отдельности.

Для систем "бак с жидкостью–электродвигатель":

1. Исследовано влияние параметров бака, жидкости и источника возбуждения колебаний (электродвигателя) на возникновение, развитие и исчезновение детерминированного хаоса.

2. Установлено существование нескольких типов хаотических аттракторов исследуемых детерминированных динамических систем типа "бак с жидкостью–электродвигатель", в том числе так называемых одномодовых и двумодовых аттракторов.

3. Обнаружен и описан новый сценарий перехода к хаосу, который обобщает классический сценарий Помо–Манневилля.

4. Построены и тщательно проанализированы основные характеристики хаотических аттракторов системы, а именно ляпуновские характеристические показатели, фазовые портреты, сечения и отображения Пуанкаре, распределения естественной инвариантной меры, распределения спектральной плотности.

5. Выявлено существование хаотических аттракторов в случае параметрического резонанса в системе, что ранее считалось невозможным.

6. Показано, что переход к хаосу может происходить по различным сценариям, таким как: каскад бифуркаций удвоения периода (сценарий Фейгенбаума), перемежаемость (классическая и обобщенная), жесткий переход.

7. Выделены случаи, в которых хаотическая динамика полученной системы дифференциальных уравнений пятого порядка может быть аппроксимирована при помощи одномерного дискретного отображения.

8. Показано, что хаотические аттракторы являются типичными аттракторами для систем "бак с жидкостью–электродвигатель". В пространстве параметров этих систем найдены обширные области, в которых существуют хаотические движения.



9. Локализованы области в фазовом пространстве, в которых хаотический аттрактор является единственным аттрактором соответствующей системы дифференциальных уравнений.

## Список использованных источников

- [1] Алифов А. А., Фролов К. В. *Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии*. — М.: Наука, 1989. — 328 с.
- [2] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*.—М.: Физматгиз, 1959. — 915 с.
- [3] Анищенко В.С., Астахов В.В. *Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью* // Радиотехника и электроника. —1983. — Т. 28, № 6. — С. 1109—1115.
- [4] Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А. *О бифуркациях в трехмерной двухпараметрической автономной колебательной системе с инерционной нелинейностью* // Изв. вузов. Радиофизика. — 1983. — Т. 26, № 7. — С. 832—842.
- [5] Анищенко В.С. *Сложные колебания в простых системах*. — М.: Наука, 1990. — 312 с.
- [6] Анищенко В.С. *Детерминированный хаос* // Соросовский образовательный журнал. — 1997. — № 6. — С. 70—76.
- [7] Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах*. — Москва-Ижевск.: ИКИ, 2003. — 530 с.

- [8] Баженов В.М., Улитко А.Ф. *Исследование динамического поведения пьезокерамического слоя при мгновенном электрическом нагружении* // Прикл. мех. — 1975. — Т. 11, № 1. — С. 22—27.
- [9] Барняк М.Я., Цебрій О.Р. *Варіаційний метод побудови розв'язків задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною* // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 2, № 1. — С. 74—83.
- [10] Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. — М.: Наука, 1992. — 486 с.
- [11] Блехман И. И. *Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин* // Инженерный сборник. — 1953. — Т. 16. — С. 49—72.
- [12] Боголюбов Н.Н. *Теория возмущений в нелинейной механике* // Сб. Ин-та строит. мех. АН УССР. — 1950. — №14. — С. 9—34.
- [13] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
- [14] Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. *Хаос в ограниченной задаче о вращениях тяжелого твердого тела с закрепленной точкой* // Нелинейная динамика. — 2005. — Т. 1, № 2. — С. 191—207.
- [15] Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. *Редукция и хаотическое поведение точечных вихрей на плоскости и сфере* // Нелинейная динамика. — 2005. — Т. 1, № 2. — С. 233—246.
- [16] Брур Х.В., Дюмортье Ф., ван Стрин С., Такенс Ф. *Структуры в динамике*. — Москва–Ижевск.: ИКИ, 2003. — 336 с.
- [17] Ван дер Поль Б. *Нелинейная теория электрических колебаний*. — М.: Связьиздат., 1935. — 289 с.

- [18] Вейц В. Л., Кочура А. Е. *Эффект ограниченного возбуждения в силовых установках с двигателями внутреннего сгорания* // Вибротехника. Вильнюс. — 1973. — 2(19). — С. 139—160.
- [19] Гадионенко А.Я. *О периодических движениях маятника с вибрирующей точкой подвеса* // Укр. мат. журн. — 1966. — Т. 18, № 5. — С. 97—101.
- [20] Ганиев Р. Ф., Ковальчук П. С. *Динамика систем твердых и упругих тел.*— М.: Машиностроение, 1980. — 208 с.
- [21] Глухарев К. К., Фролов К. В. *Взаимодействие колебательной системы с двумя источниками энергии* // Известия АН СССР. Сер. МТТ. — 1971. — № 4. — С. 65—71.
- [22] Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. *Электроупругость.* — К.: Наук. думка, 1989. — 277 с.
- [23] Гузь А. Н., Маркуш Ш., Пуст Л. и др. *Динамика тел, взаимодействующих со средой.* — К.: Наук. думка, 1991. — 392 с.
- [24] Гуржий А.А., Константинов М.Ю., Мелешко В.В. *Регулярное и хаотическое движение трех коаксиальных вихревых колец* // Теоретическая и прикладная механика. — 1990. — № 21. — С. 100—104.
- [25] Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* — М.: Наука, 1967. — 432 с.
- [26] Диментберг М. Ф., Фролов К. В. *Эффект Зоммерфельда в системе со случайно изменяющейся собственной частотой* // ДАН СССР. — 1966. — Т. 171, №6. — С. 1293—1296.
- [27] Дмитриев А.С., Кислов В.Я. *Стохастические колебания в радиофизике и электронике.*—М.: Наука, 1989. — 280 с.

- [28] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. *Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса.* — М.: Наука, 1988. — 368с.
- [29] Калищук А. К. *Элементарный способ изучения динамических свойств систем* // ЖТФ. — 1939. — Т. 9, вып. 8. — С. 86—90.
- [30] Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения и другие работы по теории устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* — М.: Изд.-во АН СССР, 1956. — 473 с.
- [31] Кана Д.Д. *Подтвержденная модель сферического маятника, описывающая вращательное плескание жидкости* // J. of Spacecraft and Rockets. —1989. — № 3. — С. 188—195.
- [32] Капица П.Л. *Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса* // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1951. — Т. 21. — С. 588—607.
- [33] Кияшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И. *Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением* // Радиотехника и электроника. — 1980. — Т. 25, № 2. — С. 336—343.
- [34] Колмогоров А.Н. *Об энтропии на единицу времени, как метрическом инварианте автоморфизмов* // ДАН СССР. — 1959. — Т. 154. — С. 754—755.
- [35] Кононенко В. О. *Вынужденные колебания системы с источником энергии в случаях малой нелинейности* // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. — 1961. — № 5 — С. 69—76.
- [36] Кононенко В. О., Кораблев С. С. *Про коливання вала з дисками при врахуванні оберненого зв'язку двигуна з коливальною системою* // Прикладна механіка. — 1960. — Т. 6, № 2. — С. 129—137.

- [37] Кононенко В.О. *Колебательные системы с ограниченным возбуждением*. — М.: Наука, 1964. — 256 с.
- [38] Кононенко В.О, Краснопольская Т.С. *Ламповый генератор в системе возбуждения механических колебаний* // Вибротехника. — 1977. — Т. 28, № 4. — С. 105—120.
- [39] Кононенко В. О., Павловский М. А. *О погрешностях амортизированных пространственных гиросприборов, вызванных пространственными колебаниями* // Изв. АН СССР. МТТ. — 1977. — Т. 23, № 4. — С. 9—19.
- [40] Краснопольская Т.С. *Автономное возбуждение механических колебаний электродинамическим вибратором* // Прикл. мех. — 1977. — Т. 13, № 2. — С. 108—113.
- [41] Краснопольская Т. С., Лавров К. А. *Нелинейные колебания цилиндрической оболочки с жидкостью при ограниченном возбуждении* // Прикл. механика. — 1988. — Т. 24, № 11. — С. 67—72.
- [42] Краснопольская Т. С., Мелешко В. В. *Ламинарное смешивание жидкостей. Часть 1. Методологические аспекты исследования* // Прикл. гидромех. — 2004. — Т. 6, № 3. — С. 28—40.
- [43] Краснопольская Т. С., Подчасов Н. Л. *Резонансы и хаос при неосесимметричных динамических процессах в гидроупругих системах* // Прикл. мех. — 1993. — Т. 29, № 12. — С. 72—77.
- [44] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. *Взаимодействие маятниковых систем с неидеальным источником энергии при наличии запаздывания* // Theoretical and Applied Mechanics. — 1985. — V. 16, № 3. — P. 16—18.
- [45] Краснопольская Т. С., Швец А. Ю. *Запаздывание как энергетический регулятор при стабилизации маятника неидеальным источником энергии* // Машиноведение. — 1985. — № 5. — С. 32—37.

- [46] Краснопольская Т.С., Шве́ц А.Ю. *Высокочастотная стабилизация маятника неидеальным источником энергии при наличии запаздывания* // Прикл. мех. — 1985. — Т. 21, № 10. — С. 102—109.
- [47] Краснопольская Т.С., Шве́ц А.Ю. *Резонансное взаимодействие маятника с механизмом возбуждения при наличии запаздывания воздействий* // Прикл. мех. — 1987. — Т. 23, № 2. — С. 82—89.
- [48] Краснопольская Т. С., Шве́ц А. Ю. *Хаотические режимы движения в системах с ограниченным возбуждением* // Всесоюзная конференция "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики". Тез. докл., Ч.1. — Тернополь. —1989. — С. 219—220.
- [49] Краснопольская Т.С., Шве́ц А.Ю. *Хаотические режимы взаимодействия в системе "маятник-источник энергии"* // Прикл. мех. —1990. — Т. 26, № 5. — С. 90—96.
- [50] Краснопольская Т. С., Шве́ц А. Ю. *Хаос в колебательных системах с ограниченным возбуждением* // Нелинейные колебания механических систем. Тез. докл. II Всесоюзной конференции, Ч.1 — Горький: Изд-во Горьковского гос. ун-та. — 1990. — С. 91—92.
- [51] Краснопольская Т.С., Шве́ц А.Ю. *Регулярные и хаотические поверхностные волны в жидкости при ограниченном возбуждении колебаний цилиндрического бака* // Прикл. мех. — 1990. — Т. 26, № 8. — С. 85—93.
- [52] Краснопольская Т. С., Шве́ц А. Ю. *Структура хаоса в баках с жидкостью* // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики – Вторые боголюбовские чтения. Тез. докл. — Киев. — 1992. - С. 78.
- [53] Краснопольская Т.С., Шве́ц А.Ю. *Свойства хаотических колебаний жидкости в цилиндрических баках* // Прикл. мех. — 1992. — Т. 28, № 6. — С. 52—61.

- [54] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. *Хаотические колебания сферического маятника как эффект взаимодействия с источником энергии* // Прикл. мех. — 1992. — Т. 28, № 10. — С. 61—68.
- [55] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. *Структура хаоса при колебаниях жидкости в цилиндрических баках* // Мат. методы исслед. прикладных задач динамики тел, несущих жидкость. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. — С. 52—66.
- [56] Краснопольская Т. С., Швец А. Ю. *Параметрический резонанс в системе "жидкость в баке– электродвигатель"* // Прикл. механика. — 1993. — Т. 29, № 9. — С. 52–61.
- [57] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. *Детерминированный хаос в системе генератор–пьзокерамический излучатель* // Нелинейная динамика. — 2006. — Т. 2, № 1. — С. 55—74.
- [58] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. *Хаос и гиперхаос в детерминированных системах "пьзокерамический преобразователь – генератор"* // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннот. докл. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та. — 2006. — Т. 1. — С. 74.
- [59] Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. *О резонансных явлениях при нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами* // Прикл. механика. — 1993. — Т. 15, № 9. — С. 100—107.
- [60] Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Бояршина Л.Г., Краснопольская Т.С., Подчасов Н.П., Пучка Г.Н., Холопова В.В., Швец А.Ю. *Нелинейная динамика осесимметричных тел, несущих жидкость*. — К.: Наук. думка, 1992.— 184 с.



- [61] Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С. *Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек*. — Киев: Наук. думка., 1984. — 220 с.
- [62] Кузнецов С.П. *Динамический хаос*. — М.: Физматлит, 2001. — 295с.
- [63] Ландау Л.Д. *К проблеме турбулентности* // ДАН СССР. — 1944. — Т. 44, № 8. — С. 339—342.
- [64] Лихтенберг А., Либерман М. *Регулярная и стохастическая динамика*. — М.: Мир, 1984. — 471 с.
- [65] Луковский И.А. *Механические аналогии в задачах нелинейной динамики твердого тела с жидкостью* // Вопросы механики и ее приложений: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — Т. 44. — С.125—160.
- [66] Маначурян Г.В., Михлин Ю.В. *Построение гомо- гетероклинических траекторий в нелинейных системах* // ПММ. — 2005. — Т. 69, № 1. — С. 42—52.
- [67] Мартышкин В. У. *Установка для изучения динамических характеристик строительных материалов* // Динамические свойства строительных материалов. — М.: Стройиздат, 1940. — 160 с.
- [68] Мелешко В. В., Краснопольская Т. С. *Смешивание вязких жидкостей* // Нелинейная динамика. — 2005. — Т. 1, № 1. — С. 69—109.
- [69] Мелешко В.В., Константинов М.Ю. *Динамика вихревых структур*. — К.: Наук. Думка, 1993. — 280 с.
- [70] Митропольский Ю.А., Швец А.Ю. *О влиянии запаздывания на устойчивость маятника с вибрирующей точкой подвеса* // Аналитические методы исследования нелинейных колебаний: Сб. научн. тр. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1980. — С. 115—120.

- [71] Митропольский Ю.А., Швец А.Ю. *О колебаниях маятника с вибрирующей точкой подвеса при наличии запаздывания* // Аналитические методы исследования нелинейных колебаний: Сб. научн. тр. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1980. — С. 120—128.
- [72] Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И. *Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами*. — К.: Наук. думка, 1984. — 216 с.
- [73] Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. *Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью*. — М.: Машиностроение, 1977. — 206 с.
- [74] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. *Стохастические и хаотические колебания*. — М.: Наука, 1987. — 424 с.
- [75] Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений*. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1947. — 448 с.
- [76] Оселедец В.И. *Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова для динамических систем* // Тр. Моск. мат. общества. — 1968. — 19. — С. 179—210.
- [77] Пановко Я. Г., Губанова И. И. *Устойчивость и колебания упругих систем*. — М.: Наука, 1979. — 384 с.
- [78] Пиковский А.С., Рабинович М.И. *Простой автогенератор со стохастическим поведением* // ДАН СССР. — 1978. — Т. 239, № 2. — С. 301—304.
- [79] Плахтиенко Н. П., Лысак Н. В. *О вынужденных колебаниях нелинейной системы, возбуждаемой центробежным вибратором, имеющим пологую характеристику двигателя* // Прикл. мех. — 1980. — Т. 16, № 9. — С 110—114.

- [80] Пуанкаре А. *Избр. Труды в 3 т.* — М.: Наука, 1971.—1972.
- [81] Пуст Л. *Переход через область резонанса в колебательных механических системах с учетом влияния вибратора* // Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям. — К.: Наук. Думка, 1963. — С. 398—408.
- [82] Рабинович Б. И. *Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов.* — М.: Машиностроение, 1983. — 296 с.
- [83] Растригин Л.А. *Колебания гибкого вала при переходе через критическую скорость с учетом его связи с двигателем* // Пробл. прочности в машиностроении. — 1959, вып.5. — С. 10—33.
- [84] Раус Э.Дж. *Динамика систем твердых тел.* — М.: Наука, 1983. — Т.1. — 464 с.
- [85] Самойленко А.М. *К вопросу о структуре траекторий на торе* // Укр. мат. журн. — 1964. — Т. 16, № 6. — С. 769—782.
- [86] Самойленко А.М. *Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Укр. мат. журн. — 1965. — Т. 17, № 4. — С. 82—93.
- [87] Самойленко А.М. *Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Укр. мат. журн. — 1966. — Т. 18, № 2. — С. 50—59.
- [88] Самойленко А.М. *Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы.*— М.: Наука, 1987. — 304 с.
- [89] Самойленко А.М. *О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого тороидального многообразия* // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1966. —Т. 30, № 5. — С. 1047—1072.

- [90] Самойленко А.М. *О сохранении инвариантного тора при возмущении* // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1970. — Т. 34, № 6. — С. 1219—1240.
- [91] Самойленко А.М. *О приведении динамической системы в окрестности гладкого инвариантного тора к каноническому виду* // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1972. — Т. 36, № 1. — С. 209—233.
- [92] Самойленко А.М. *Об экспоненциальной устойчивости гладкого инвариантного тора динамической системы* // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, №5. — С. 820—834.
- [93] Самойленко А.М., Теплінський Ю.В., Семенишина І.В. *Про існування гладкого обмеженого напівінваріантного многовиду виродженої нелінійної системи різницевих рівнянь у просторі  $m$*  // Нелінійні коливання. — 2003. — Т. 6, № 3. — С. 378—400.
- [94] Теплінський Ю.В., Марчук Н.А. *Про  $C^p$ -гладкість інваріантного тора зчисленної системи різницевих рівнянь, визначеної на  $m$ -вимірному торі* // Нелінійні коливання. — 2002. — Т. 5, № 2. — С. 251—265.
- [95] Улитко А.Ф. *Сопряженные волновые процессы в пьезокерамических телах при электрическом разряде* // Акустичний вісник. — 1999. — Т. 2, № 1. — С. 60—73.
- [96] Улитко А.Ф. *Векторное разложение в пространственной теории упругости*. — К.: Академперіодика, 2002.—342 с.
- [97] Фейгенбаум М. *Универсальность в поведении динамических систем* // УФН. — 1983. — Т. 141, № 2. — С. 343—374.
- [98] Фролов К.В. *Колебания машин с ограниченной мощностью источника энергии и переменными параметрами* // Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах. — М.: Наука, 1972. — С. 5—17.

- [99] Фролов К. В. *Исследования П. О. Кононенко в области теории нелинейных колебаний, их значение и развитие* // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — № 1. — С. 3—8.
- [100] Челомей В.Н. *О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций* // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 110, № 3. — С. 345—347.
- [101] Хайрер Е., Нерсетт С.П., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи.* — М.: Мир, 1990. — 512 с.
- [102] Харкевич А.А. *Спектры и анализ.* — М.: ГИТТЛ, 1957 — 236 с.
- [103] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* — М.: Мир, 1984. — 422 с.
- [104] Шарковский А.Н. *Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя* // Укр. мат. журн. — 1964. — Т. 16, № 1. — С. 61—71.
- [105] Швец А.Ю. *Влияние запаздывания на колебательно-вращательные движения двойного маятника* // Методы нелинейной механики и их приложения.: Сб. научн. тр. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1982. — С. 141—148.
- [106] Швец А.Ю. *Об устойчивости двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса при наличии запаздываний в уравнениях движения* // Приближенные методы исследования нелинейных колебаний: Сб. научн. тр. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1983. — С. 161—172.
- [107] Швец А.Ю. *Влияние переменного запаздывания на устойчивость колебаний маятника с вибрирующим подвесом* // Укр. мат. журн. — 1985. — Т. 37, № 1. — С. 127—129.
- [108] Швец А.Ю. *Резонансные колебания маятника при учете факторов переменного запаздывания* // Асимптотическое интегрирование диффе-

ренциальных уравнений: Сб. научн. тр. — Киев: Ин-т математики АН УССР — 1985. — С. 173—179.

- [109] Шве́ц А.Ю. *Динамическая устойчивость системы "маятник-эксцентриковый возбудитель" при учете запаздывания* // Математическая физика и нелинейная механика. — 1987. — №8(42). — С. 29—34.
- [110] Шве́ц А.Ю. *Хаотические режимы взаимодействия в детерминированной системе "генератор - пьезокерамический излучатель"* // Вопросы аналитической механики и ее применений: Праці Ін-ту математики НАН України. — 1999. — Т. 26. — С. 407—419.
- [111] Шве́ц А.Ю. *Хаотизация движений в некоторых динамических системах с ограниченным возбуждением при учете факторов запаздывания* // Шестая Крымская Международная школа "Метод функций Ляпунова — 2002". Тез. докл. — Симферополь: Изд-во Таврического нац. ун-та. — 2002. — С. 125.
- [112] Шве́ц А.Ю. *Влияние запаздывания на режимы взаимодействия в системе "генератор - пьезокерамический излучатель"* // Вопросы механики и ее приложений: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — Т. 44. — С. 346—358.
- [113] Шве́ц А.Ю. *Бифуркации "порядок — хаос" в динамических системах с органичным возбуждением, обусловленные влиянием запаздывания* // Dynamical System Modelling And Stability Investigation. — Kyiv. — 2003. — P. 378
- [114] Шве́ц А.Ю. *Карта динамических режимов физического маятника при органичном возбуждении* // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 1, № 2. — 2004. — С. 197—209.
- [115] Шве́ц Г.А., Шве́ц А.Ю. *Хаос в детерминированных динамических системах типа "генератор-излучатель" при учете ограниченности*

- возбуждения и факторов запаздывания* // Седьмая Крымская Международная школа "Метод функций Ляпунова — 2004". Тез. докл. — Симферополь: Изд-во Таврического нац. ун-та. — 2004. — С. 156.
- [116] Шве́ц А.Ю. *Мультипараметрические карты динамических режимов маятника при ограниченном возбуждении* // Dynamical System Modelling And Stability Investigation. — Kyiv. — 2005. — Р. 224.
- [117] Шве́ц А.Ю. *Гиперхаос в детерминированной динамической системе "генератор — пьезокерамический излучатель"* // Зб. праць акустичного сімпозіуму "Консонанс — 2005". — Київ: Ін-т гідромеханіки НАН України. — 2005. — С. 309—314.
- [118] Шве́ць О.Ю., Краснопольська Т.С. *Динамічний хаос в п'єзокерамічних системах обмеженої потужності. Частина 1* // Наукові вісті Нац. тех. ун-ту України "КПІ". — 2006, № 2. — С. 150—158.
- [119] Шве́ць О.Ю., Краснопольська Т.С. *Динамічний хаос в п'єзокерамічних системах обмеженої потужності. Частина 2* // Наукові вісті Нац. тех. ун-ту України "КПІ". — 2006, № 3. — С. 147—154.
- [120] Шве́ць О.Ю. *Детермінований хаос при коливаннях фізичного маятника* // Наукові вісті Нац. тех. ун-ту України "КПІ". — 2006, № 4. — С. 85—91.
- [121] Шве́ц А.Ю. *Сценарии переходов "порядок-хаос" при резонансных колебаниях жидкости в цилиндрических баках* // Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 216—249.
- [122] Шве́ц А.Ю. *Детерминированный хаос сферического маятника при ограниченном возбуждении* // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 4. — С. 534—548.
- [123] Шве́ц А.Ю. *Динамический хаос в системе "бак с жидкостью — электродвигатель"* // Динамические системы. — 2007. — № 22. — С. 46—62.

- [124] Шве́ц А.Ю. *Об особенностях перехода к детерминированному хаосу в некоторых гидродинамических системах.* // Международная конференция "Анализ и особенности" посвященная 70-летию В.И. Арнольда. — М., Мат. ин-т РАН. — 2007. — С. 114—116.
- [125] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. *Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1.* — Москва—Ижевск.: ИКИ, 2004. — 414с.
- [126] Шредер М., *Фракталы, хаос, степенные законы.* —Ижевск: НИЦ "РХД", 2001. — 527с.
- [127] Auld B.A. *Acoustic Fields and Waves in Solids.* — New York: John Wiley & Sons, 1973. — 837 p.
- [128] Aref H. *Stirring by chaotic advection* // J. Fluid Mech. — 1984. — Vol. 143. — P. 1—24.
- [129] Aref H. *Chaotic advection of fluid particles* // Phil. Trans. R. Soc. London. — 1990. — A —Vol. 333. — P. 273—289.
- [130] Aref H. *Stochastic particle motion in laminar flows* // Phys. Fluids. — 1991. — A —Vol. 3. — P. 1009—1016.
- [131] Aref H. *The development of chaotic advection* // Phys. Fluids. —2002. — Vol. 14. — P. 1315—1325.
- [132] Bajaj A.K., Johnson J.M., *Asymptotic techniques and complex dynamics in weakly non-linear forced mechanical systems* // Int. J. Non-Linear Mech. — 1990. — Vol. 25, № 2/3. — P.211—226.
- [133] Balthazar J. M., Cheshankov B. I., Ruschev D. T., Barbanti L., Weber H. I., *Remarks on the passage through resonance of a vibrating system with two degrees of freedom, excited by a non-ideal energy source* // Journal of Sound and Vibration. — 2001. — Vol. 239, № 5. — P. 1075—1085.



- [134] Balthazar J. M., Mook D. T. , Weber H. I., Brasil R. M., Fenili A. , Belato D. , Felix J. L. P. *An Overview on Non-Ideal Vibrations* // Meccanica. — 2003. — Vol. 38. — P. 613—621.
- [135] Barbera F. J. *An analytical technique for studying the anomalous roll behavior of reentry vehicles* // J. Spacecraft. — 1969. — Vol. 6. — P. 1279—1284.
- [136] Belato D., Balthazar J. M. , Weber H. I. . *A note about of non-hyperbolic solutions in a mechanical pendulum system* // Nonlinear Dynamics. —2003. — Vol. 34. — P. 300—317.
- [137] Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.M. *Kolmogorov entropy and numerical experiments* // Phys. Rev. A. —1976. — Vol. 14, № 6. — P. 2338—2342.
- [138] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M. *Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems; a Method for Computing All of them. P.1* // Meccanica. — 1980. — Vol. 15, №1. — P. 9—20.
- [139] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M. *Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems; a Method for Computing All of them. P.2* // Meccanica. — 1980. — Vol. 15, №1. — P. 21—30.
- [140] Berge P., Pomeau Y., Vidal C.H. *Order within chaos*. —New York:John Wiley & Sons, 1984. — 368 p.
- [141] Bryant P.J., Miles J.W. *On a periodically forced, weakly damped pendulum. Part 2: horizontal forcing* // J. Austral. Math. Soc. Ser B. — 1990. — Vol. 20. — P. 23—41.
- [142] Cartwright M.L., Littlewood J.E. *On nonlinear differential equations of the second order* // J. Lond. Math. Soc. — 1945. — Vol. 20. — P. 180—189.

- [143] Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. *The double scroll family* // IEEE Trans. — 1986. — Vol. CAS33. — P. 1073—1118.
- [144] Ciliberto S., Gollub J.P. *Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves* // J. Fluid Mech. — 1985. — Vol. 158. — P. 381—398.
- [145] Crawford J. D., Knobloch E. *Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid dynamics* // Ann. Rev. Fluid Mech. — 1991. — Vol. 23. — P. 341—387.
- [146] Dantas M. J. H., Balthazar J. M. *On Local Analysis of Oscillations of a Non-ideal and Non-linear Mechanical Model* // Meccanica. — 2004. — Vol. 39. — P. 313—330.
- [147] Dimentberg M.F., McGovern L., Norton R.L., Chapdelaine J., Harrison R. *Dynamics of an Unbalanced Shaft Interacting with a Limited Power Supply* // Nonlinear Dynamics. — 1997. — Vol. 13. — P. 171—187.
- [148] Dormand J.H., Prince P.J. *A family of embedded Runge formulae* // J. Comp. Appl. Math. — 1980. — №6. — P. 19—27.
- [149] Erdeli A. *Über die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillirenden Aufhängenpunkt* // ZAMM. — 1934. — № 14. — S. 235—247.
- [150] Faraday M. *On a peculiar class of acoustical "figures;" and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces* // Phil. Trans. R. Soc. Lond. — 1831. — A — Vol. 121. — P. 299—340.
- [151] Feigenbaum M.J. *Quantative universality for a class of nonlinear transformations* // J.Stat. Phys. — 1978. — Vol. 19, № 1. — P. 25—52.
- [152] Feigenbaum M.J. *The universal metric properties of nonlinear transformations* // J.Stat. Phys. — 1979. — Vol. 21, № 6. — P. 669—706.

- [153] Feigenbaum M.J. *The transition to aperiodic behavior in turbulent systems* // Comm. Math. Phys. — 1980. — Vol. 77, № 1. — P. 65—86.
- [154] Felix J. L. P., Balthazar J. M., Brasil R. M. L. R. F. *Saturation Control of a Non-Ideal Vibrating Portal Frame Foundation Type Shear-Building* // Journal of Vibration and Control. — 2005. — Vol. 11. — P. 121—136.
- [155] Fenili A. , Balthazar J. M. , Mook D. T. , Weber H. I. *Application of the Center Manifold Theory to the Study of Slewing Flexible Non-ideal Structures with Nonlinear Curvature: a Case Study* // J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences. — July 2002, Vol. I. — P. 239—250.
- [156] Fenili A., Balthazar J. M., Brasil R. M. L. *Mathematical modelling of a beam-like flexible structure in slewing motion assuming non-linear curvature* // Journal of Sound and Vibration. — 2003. — Vol. 268. — P. 825—838.
- [157] Filon L.N.G. *On a quadrature formula for trigonometric integrals* // Proc. R. Soc. Edinburgh. — 1929. — Vol.49. — P. 38—47.
- [158] Funakoshi M., Inoue S. *Surface waves due to resonant horizontal oscillation* // J. Fluid Mech. — 1988. — Vol. 192. — P. 219—247.
- [159] Funakoshi M., Inoue S. *Bifurcations of limit cycles in surface waves due to resonant forcing* // Fluid Dynamics Research. — 1990. — Vol. 5. — P. 255—271.
- [160] Funakoshi M., Inoue S. *Stable periodic orbits of equations for resonantly forced water waves* // J. Phys. Soc. of Japan. — 1992. — Vol. 61, № 9. — P. 3411—3412.
- [161] Gibbs J. W. *Elementary Principles in Statistical Mechanics*. — NewHaven: Scribner, 1902. — 584 p.
- [162] Grassberger P. *Generalized dimensions of strange attractors* // Phys. Lett. — 1983. — A97. — p. 224—226.

- [163] Grassberger P., Procaccia I. *Measuring the strangeness of strange attractors* // Physica. — 1983. — D9. — P. 189—208.
- [164] Hale J.K. *Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter* // J. Diff. Equations. — 1966. — Vol. 2, № 1. — P. 57—63.
- [165] Henderson D. M., Miles J. W. *Single-mode Faraday waves in small cylinders* // J. Fluid Mech. — 1990. — Vol. 213. — P. 95—109.
- [166] Henon M., Heiles C. *The applicability of the third integral of the motion: some numerical experiments* // Astron. J. — 1964. — Vol. 69. — P. 73—79.
- [167] Henon M. *On the numerical computation of Poincare maps* // Physica. D. — 1982. — Vol. 5, № 2. — P. 412—415.
- [168] Hentschel H.G., Procaccia I. *The infinite number of generalized dimensions of fractal and strange attractors* // Physica. D. — 1983. — Vol. 8. — P. 435—444.
- [169] Hopf E. *A mathematical example displaying the features of turbulence* // Comm. Pure Appl. Math. — 1948. — Vol. 1. — P. 303—322.
- [170] Kambe T., Umeki M. *Nonlinear dynamics of two-mode interaction in parametric excitation of surface waves* // J. Fluid Mech. — 1990. — Vol. 139. — P. 461—471.
- [171] Kaplan J.L., Yorke J.A. *The onset of chaos in a fluid flow model of Lorenz* // Ann.N.Y. Acad. Sci. — 1979. — Vol. 316. — P. 400.
- [172] Kaplan J.L., Yorke J.A. *A chaotic behaviour of multy-dimensional differential equations* // Functional Differential Equations of Fixed Points/Eds. H.O. Peitgen, H.O. Walther. — Berlin, N.Y.: Springer. — 1979. — Vol. 730. — P. 204—227.

- [173] Kelvin W. *On the stability of periodic motion* // Nature. — 1892. — Vol. 46, № 1190. — P. 384.
- [174] Kononenko V. O. *Vibrating system with a limited power-supply*. — London, Iliffe, 1969. — 236 p.
- [175] Krasnopolskaya T. S., Meleshko V. V., Peters G. W. M., Meijer H. E. H. *Mixing in Stokes flow in an annular wedge cavity* // European Journal of Mechanics, B - Fluids. — 1999. — V. 18. — P. 793—822.
- [176] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. *Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply* // 8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms. Eds. M. Okrolnick, L. Pust. Prague: Czechoslovak Acad. Sci, 1991. — Vol. 1— P. 181—184.
- [177] Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. *Chaotic behaviour of surface waves in a tank* // Abstracts International colloquim Euromech 275. — Lisboa: Institute of Super Technics, 1991. — P. 45.
- [178] Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. *Low-dimensional models of chaotic surface waves in cylindrical and spherical tanks* // 1-st European Fluid Mechanics Conference. — Cambridge: University of Cambridge, 1991. — P. 81.
- [179] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. *Chaotic oscillations of a spherical pendulum as the effect of interaction with excitation device* // Complexity in Physics and Technology.—Singapore: World Scientific. — 1992. — P. 77–89.
- [180] Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. *Chaos in vibrating systems with a limited power supply* // Abstracts of “CHAOS—IV”: American—Russian—Ukrainian Conference on Chaos. — Kiev, 1992. — P. 35.
- [181] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. *Chaos in vibrating systems with limited power-supply* // Chaos. — 1993. — Vol. 3, № 3. — P.387—395.

- [182] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. *Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations* // J. Fluids & Structures. —1994. — Vol. 8, № 1. — P.1—18.
- [183] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. *Chaotic interaction between fluid vibrations in a cylindrical tank and electromotor* // Flow Induced Vibration. — Rotterdam: A.A.Balkema. Brookfield. — 1995. — P. 269—280.
- [184] Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. *Chaos in nonlinear systems with a limited power supply* // International Conference Nonlinear Differential Equations, Kiev. — 1995. — P. 88.
- [185] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. *Deterministic chaos in a system generator – piezoceramic transducer* // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. —2006. — Vol. 6, № 4. —P. 367—387.
- [186] Krasnopolskaya T.S. *Acoustic chaos caused by Sommerfeld effect* // J. Fluids & Structures. — 1994. — Vol. 8, № 5. — P. 803—815.
- [187] Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Chua L. *Two-parameter study of transition to chaos in Chua's circuit: renormalization group, universality and scaling* // Int. J. of Bifurcation and Chaos. — 1993. — Vol. 3, № 4. — P. 943—962.
- [188] Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. *A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos* // Physica. D. — 1997. — Vol. 109. — P. 91—112.
- [189] Lorenz E.N. *Deterministic Nonperiodic Flow* // J. Atmos. Sci. —1963. — Vol. 20. —P. 130—141.
- [190] Manneville P., Pomeau Y. *Intermittency and the Lorenz model* // Phys. Let. A. —1979. —Vol. 75, №1–2. — P. 1—2.

- [191] Manneville P., Pomeau Y. *Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems* // Physica D.: Nonlinear Phenomena. —1980. —Vol. 1, № 2. — P.219—226.
- [192] Meron E., Procaccia J. *Low-dimensional chaos in surface waves: theoretical analysis of an experiment* // Phys. Rev. A. — 1986. — Vol. 34. — P. 3221—3237.
- [193] Meleshko V.V., Konstantinov M.Yu. *Order and chaos in the dynamics of the coaxial vortex rings* // Nonlinear World, World Scientific, Singapore. —1990. — Vol.1. — P. 561—571.
- [194] Meleshko V.V., van Heijst G.J.F. *Interacting two-dimensional vortex structures: point vortices, contour kinematics and stirring properties* // Chaos, Solitons & Fractals. —1994. — Vol. 4. — P. 977—1010.
- [195] Meleshko V.V., Aref H. *A blinking rotlet model for chaotic advection* // Phys.& Fluids. — 1996. — Vol.8. —P. 3215—3217.
- [196] Mikhlin Yu.V., Manucharyan G.V. *Construction of homoclinic and heteroclinic trajectories in mechanical systems with several equilibrium positions* // Chaos, Solitons & Fractals. — 2003. — Vol. 16. — P. 299—309.
- [197] Mikhlin Yu.V., T.V. Shmatko, Manucharyan G.V. *Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibratioin modes in systems with several equilibrium positions* // Computers & Structures. — 2004. — Vol. 82. — P. 2733—2742.
- [198] Mikhlin Yu.V., Manucharyan G.V. *Determination of the chaos onset in mechanical systems with several equilibrium positions* // Meccanica. —2006. — Vol. 41. — P. 253—267.
- [199] Miles J.W. *Stability of forced oscillations of a spherical pendulum.* // Quart. Appl. Math. — 1962. — Vol. 20, № 1. — P.21—32.

- [200] Miles J. W. *Nonlinear surface waves in closed basins* // J. Fluid Mech. — 1976. — Vol.75, № 3. — P. 419—448.
- [201] Miles J.W. *Resonant motion of a spherical pendulum* // Physica. D. — 1984. — Vol. 11, № 3. — P. 309—323.
- [202] Miles J. W. *Internally resonant surface waves in circular cylinder* // J. Fluid Mech. — 1984. — Vol. 149. — P. 1—14.
- [203] Miles J. W. *Resonantly forced surface waves in circular cylinder* // J. Fluid Mech. — 1984. — Vol. 149. — P. 15—31.
- [204] Miles J.W. *Nonlinear Faraday resonance* // J. Fluid Mech. — 1984. — Vol. 146, № 2. — P. 285—302.
- [205] Miles J.W. *Parametric excitation of an internally resonant double pendulum* // ZAMP. — 1985. — Vol. 36, № 3. — P. 337—345.
- [206] Miles J. W., Henderson D. *Parametrically forced surface waves* // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1990. — Vol. 22. — P. 143—165.
- [207] Nayfeh A. H., Mook .D T. *Nonlinear oscillations*. — Weinheim: Wiley-VCH VerlagGmbH&Co. KGaA, 2004. — 704 p.
- [208] Nayfeh A. H., Mook .D T., Marshall L. R. *Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions* // J. Hydronautics. — 1973. — Vol. 7. — P. 145—152.
- [209] Nayfeh A. H., Saric W. S. *An analysis of asymmetric rolling bodies with nonlinear aerodynamics* // AIAA. — 1972. — Vol. 10. — P. 1004—1011.
- [210] Platus D. H. *Angle-of-attack convergence and windward-meridian rotation rate of rolling reentry vehicles* // AIAA. — 1969. — Vol. 12. — P. 2324—2332.
- [211] Pomeau Y., Manneville P. *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems* // Comm. Math. Phys. —1980. —Vol. 74, № 2. — P. 189—197.



- [212] Price D. A., Ericsson L. E. *A new treatment of roll-pitch coupling for ballistic reentry vehicles* // AIAA. — 1970. — Vol. 8. — P. 1608—1615.
- [213] Rayleigh W. *Theory of Sound*. —London: Macmillan, 1877.
- [214] Rayleigh W. *On the maintenance of vibration by forces of double frequency*. // Phil.Mag.Ser. 5. — 1887.—Vol. 24. — P.145—159.
- [215] Reynolds O. *An experimental investigation on the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channals* // Phil. Trans. Roy. Soc. — 1883. — Vol. 174. — P.935—977.
- [216] Rocard Y. *Dynamique générale des vibrations* . — Paris: Masson, 1943. — 459 p.
- [217] Rössler O.E. *An equation for continuous chaos* // Rhys. Lett. — 1976. — Vol. A57, № 5. — P. 397—398.
- [218] Rössler O.E. *An equation for hyperchaos* // Rhys. Lett. — 1979. — Vol. A71, № 2, 3. — P. 155—159.
- [219] Ruelle D., Takens F. *On the Nature of Turbulence* // Comm. Math. Phys. — 1971. — Vol.20. —P. 167—192.
- [220] Samoilenko A.M. and Teplinskii Yu.V. *Countable Sistems of Differential Equations*. // VSP: Utrecht-Boston, 2003. — 287 p.
- [221] Sharkovskii A.N., Deregel Ph., Chua, L. *Dry turbulence and period-adding phenomena from a 1-D map with time delay* // Intern. J. Bifurcation and Chaos. — 1995. — № 5. — P. 1283—1302. (Reprint of the paper in World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. B, 8, Thirty years after Sharkovskii's theorem: new perspectives (Murcia, 1994)).

- [222] Shvets A.Yu. *Delay as a controlling factor in the oscillating system "pendulum- non ideal inducer"* // Abstracts of International Conference of Nonlinear Oscillations "ICNO-XI". — Budapest, 1987. — P.332.
- [223] Shvets A.Yu. *Chaotic Oscillation Of Pendulum Systems As Effect Of The Interaction With The Excitation Arrangement* // Dynamical System Modelling And Stability Investigation. Mechanical Systems. — Kyiv., 1999. — P. 100—101.
- [224] Shvets A.Yu. *Chaotic vibrations in some systems with limited power-supply* // VII Международная конференция "Устойчивость, управление и динамика твердого тела". Тез. докл. — Донецк. — 1999. — С. 197.
- [225] Shvets A.Yu. *Delay influence on chaotic oscillations in some systems with limited power-supply* // Український Математичний Конгрес — 2001. Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. — С. 54—55.
- [226] Shvets A.Yu., Krasnopol'skaya T.S., Pechernyi V.A. *Chaotic Generation of Oscillations in Deterministic Piezoceramic Systems with Limited Power-Supply* // XI Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Матер. конф. — Київ. — 2006. — с. 292.
- [227] Shvets A.Yu., Krasnopol'skaya T.S. *Hyper-chaos in piezoceramic systems with limited power-supply* // IUTAM Symposium on hamiltinian dynamics, vortex structures, turbulens. — Moscow: MIRAN. — 2006. — P.130—132.
- [228] Shvets A.Yu., Shvets G.A. *Maps of Dynamic Regimes of the Pendulum at Limited Excitation* // Восьмая Крымская Международная школа "Метод функций Ляпунова-2006". Тез. докл. — Симферополь: Изд-во Таврического нац. ун-та. — 2006. — С. 214.
- [229] Shvets A.Yu., Krasnopol'skaya T.S. *The New Scenario of Transition to Deterministic Chaos in One Hydrodynamic System at Limited Excitation*

// Dynamical System Modelling And Stability Investigation. — Kyiv. — 2007. — P. 357.

- [230] Shvets A.Yu. *The Deterministic Chaotic Oscillations of a Spherical Pendulum with Limited Excitation* // Lyapunov Memorial Conference. — Kharkiv. — 2007. — P. 153—154.
- [231] Sommerfeld A. *Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre* // Physikalische Zeitschrift. — 1902. — Bd. 3. — S. 266—271.
- [232] Sommerfeld A. *Beitrage zum dynamischen ausbau der festigkeitslehre* // Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure. — 1902. Vol. 46. — P. 391—394.
- [233] de Souza S. L. T., Caldas I. L., Viana R. L., Balthazar J. M. *Sudden changes in chaotic attractors and transient basins in a model for rattling in gearboxes* // Chaos, Solitons and Fractals. — 2004. — Vol. 21. — P. 763—772.
- [234] de Souza S. L. T. , Caldas I. L., Viana R. L., Balthazar J. M., Brasil R. M. L. *Basins of attraction changes by amplitude constraining of oscillators with limited power supply* // Chaos, Solitons and Fractals. — 2005. — Vol. 26. — P. 1211—1220.
- [235] Timoshenko S. *Vibration Problems in Engineering*. — New York: Van Nostrand Co, 1928. — 480 p.
- [236] Tsuchida M., de Lolo Guilherme K. , Balthazar J. M. , Silva G. N., Cheshankov B. I. *On regular and irregular vibrations of a non-ideal system with two degrees of freedom. 1:1 resonance* // Journal of Sound and Vibration. — 2003. — Vol. 260. — P. 949—960.
- [237] Ulam S.M., von Neumann J. *On combination of stochastic and deterministic processes* // Bull. Amer. Math. Soc. — 1947. — Vol. 53, № 11. — P. 1112—1120.

- [238] Umeki M., Kambe T. *Nonlinear dynamics and chaos in parametrically excited surface waves* // J. Phys. Soc. Jpn. - - 1989. — Vol. 28. — P. 140—154.
- [239] Van der Pol B., Van der Mark J. *Frequency demultiplication* // Nature. —1927. — Vol. 120. — P. 363—364.
- [240] Warminski J., Balthazar J. M., Brasil R. M. L. *Vibrations of a non-ideal parametrically and self-excited model* // Journal of Sound and Vibration. — 2001. — Vol. 245, № 2. — P. 363—374.
- [241] Zharii O.Yu. *Normal mode expansions in dynamic electroelasticity and their application to electromechanical energy conversion* // J. Acoust. Soc. Am. — 1992. — № 91(1). — P. 57—68.